Oberlin College Library,
Not to be Drawn

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2. 15. Januar 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 27. Januar 1917.

INHALT:

Originalmitteilungen:

J. M. Burgers, Die adiabatischen Invarianten bedingt periodischer Systeme. S. 21.

A. Hagenbach u. K. Gegauff, Untersuchung des aerodynamischen Feldes einer kreisrunden Platte mit einer neuen Sonde. S. 21.

L. Schames, Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs. S. 30.

R. Plank, Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Léon Schames zu meiner Arbeit: „Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs". S. 33.

J. Koenigsberger, Biprismen in der Photometrie. S. 34.

M. Wolfke, Stoßionisation der Gase durch Wärmebewegung. S. 34.

K. Uller, Die Gültigkeitsgrenze des Fermatschen Prinzips; Kritik der Theorie der Refraktion und Extinktion von Wellen in inhomogenen Körpern. S. 35.

Besprechungen:

Brooks and Weaver, A variable self and mutual inductor. S. 42.

J. Klein, Chemie, anorganischer Teil. S. 42.

S. Genelin, Das chemische Praktikum, anschließend an den obligaten Unterricht in der anorganischen Chemie, in Form von Eprouvettenversuchen, nebst einer kleinen Anleitung zum Analysieren. S. 42.

Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 228, 516, 520:

A. v. Ihering, Die Wasserkraftmaschinen und deren Ausnutzung durch Wasserkräfte. S. 42.

R. Vater, Einführung in die technische Wärmelehre (Thermodynamik). S. 43.

P. Thormeyer, Philosophisches Wörterbuch. S. 43.

E. Fonrobert, Das Ozon. S. 43.

Werner v. Siemens-Gedenknummer. S. 43.

Personalien. S. 44.

Angebote. S. 44.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die adiabatischen Invarianten bedingt periodischer Systeme.

Von J. M. Burgers.

Im Anschluß an die Untersuchungen von A. Sommerfeld[1]) haben bekanntlich K. Schwarzschild und P. Epstein[2]) gezeigt, daß das Studium der sogenannten „bedingt periodischen" Systeme[3]) die Hilfsmittel zu einer weitgehenden Ausbreitung der Quantentheorie liefert. Für diese Systeme charakteristisch ist, daß jedes Moment sich ausdrücken läßt als Funktion der zugehörigen Koordinate in Verbindung mit den Integrationskonstanten der n ersten kanonischen Integrale und mit Parametern a, und daß jede Koordinate zwischen festen Grenzwerten hin und her geht.

Nun hat andererseits P. Ehrenfest gezeigt[4]), welche große Bedeutung für die Quantentheorie die „adiabatischen Invarianten" besitzen, d. h. diejenigen Größen deren Wert sich nicht ändert, falls man die „langsam veränderlichen Parameter" des Systems unendlich langsam ihre Werte ändern läßt. Speziell hat er gezeigt, daß die älteren von Planck, Debye, Bohr und Sommerfeld benützten Quantenansätze in Quantelung von solchen adiabatischen Invarianten bestehen. Dementsprechend bemerkte schon Herr Ehrenfest, daß es wichtig wäre zu untersuchen, ob auch in den von Schwarzschild, Epstein und anderen studierten Problemen die gequantelten „Phasenintegrale": $I_k = \int p_k\, dq_k$[1]) Invarianten sind.

In einer in den „Verslagen Akad. v. Wetensch. Amsterdam" erschienenen Abhandlung[2]) konnte ich zeigen, daß die Größen $I_k = \int p_k\, dq_k$ in der Tat adiab. Invarianten sind. Spezielle Entartungsprobleme (die auch von Herrn Epstein hervorgehobenen Fälle von Ganzzahligkeitsrelationen zwischen den mittleren Bewegungen) erfordern dabei eine besondere Behandlung.

1) Bei der Integration geht q_k einmal zwischen ihren Grenzwerten hin und her.

2) Verslagen Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Sitzung vom 25. Nov. 1916. — Comm. Leiden, Suppl. 41c.

Leiden, Dezember 1916.

(Eingegangen 19. Dezember 1916.)

1) A. Sommerfeld, Münch. Sitz.-Ber. 1915, S. 425, 459; Ann. d. Phys. **51**, 1, 1916.

2) K. Schwarzschild, Sitz.-Ber. Berl. Akad. 1916, S. 548.

P. Epstein, Ann. d. Phys. **50**, 490, 1916; **51**, 168, 1916.

Siehe auch: P. Debye, Gött. Nachr. 1916, S. 142; diese Zeitschr. **17**, 507, 512, 1916.

3) Diese Systeme sind zuerst von P. Stäckel behandelt worden. Siehe für die Theorie z. B. Charlier, Die Mech. d. Himmels, I.

4) P. Ehrenfest, diese Zeitschr. **15**, 657, 1914; Ann. d. Phys. **51**, 327, 1916.

Untersuchung des aerodynamischen Feldes einer kreisrunden Platte mit einer neuen Sonde.

Von A. Hagenbach und K. Gegauff.

Die Untersuchung eines aerodynamischen Feldes, wie es etwa durch einen Körper im Luftstrom erzeugt ist, kann man optisch vor-

nehmen, indem die Stromlinien irgendwie durch Fäden oder Flammen oder durch eine Trübung (Rauch) sichtbar gemacht und eventuell mittels einer photographischen Momentaufnahme festgehalten werden. Auch die optische Schlierenmethode hat öfters gute Dienste geleistet (Zickendraht). Diese Methoden geben im allgemeinen nur qualitative Ergebnisse, sie lassen aber gleichzeitig ein größeres Gebiet des Feldes übersehen und sind für die erste Orientierung stets wertvoll. Quantitative Resultate müssen mit Sonden ermittelt werden, die von Stelle zu Stelle verschoben den Zustand des Feldes angeben. Eine Sondenuntersuchung ist demnach viel umständlicher und zeitraubender, aber man erhält allein dadurch das nötige Zahlenmaterial, das eine Prüfung der Theorien gestattet und die Erkenntnis auf aerodynamischem Gebiet erweitert.

Aufnahmen nach optischen Methoden finden wir bei Ahlborn[1]), Eiffel[2]), Coanda[3]), Lafay[4]), Mach[5]), Marey[6]), Tanakadaté[7]), Riabuchinski[8]) und anderen, Sondenmessungen bei Abbé[9]), Krell[10]), Nipher[11]), Pitot[12]), Recknagel[13]), Zickendraht[14]) und anderen.

Jede Sonde bringt in dem zu messenden Felde eine Störung hervor, und je kleiner die Sonde und je mehr sie im Gebrauch ein Stromlinienkörper ist, umso kleiner wird die Störung sein. Die Größe der Sonde kommt in vielen Fällen nur relativ zur Größe des zu untersuchenden umströmten Körpers in Betracht. Große Körper verlangen aber wieder breite Luftströme mit parallelen Stromfäden und dazu sind umfangreiche Apparaturen (Luftkanäle) notwendig. Es ist deshalb wünschenswert, auch in kleinen Abmessungen im Laboratorium brauchbare Messungen ausführen zu können. Solche Überlegungen haben uns veranlaßt, das zu diesem Zweck zusammengestellte Instrumentarium von Zickendraht[1]) noch weiter zu vervollständigen.

Um das aerodynamische Feld an einem Orte zu kennen, ist notwendig, folgende drei Größen anzugeben: die Windgeschwindigkeit, die Windrichtung und den statischen Druck, Größen, die natürlich voneinander abhängen. Unter dem statischen Druck wollen wir die Druckänderung ohne dynamische Wirkung gegen eine windlose Stelle verstehen. Er kann demnach ein Überdruck oder ein Unterdruck sein, je nachdem infolge einer Stauung das spezifische Gewicht der Luft an der Stelle erhöht oder durch eine Saugwirkung vermindert worden ist.

Die in obiger Arbeit angegebene Sonde von Zickendraht zur Bestimmung des statischen Druckes hat zwar recht gute und praktische Eigenschaften, aber sie ist immer noch für manche Zwecke zu groß und die Messungen müssen durch andere Sonden ergänzt werden, welche Geschwindigkeit und Richtung ergeben.

Im folgenden soll über eine Sonde berichtet werden, die an Kleinheit kaum mehr übertroffen werden kann und die alle drei genannten Größen anzeigt. Sie besteht aus einer stricknadeldicken geraden Röhre, vorn abgerundet verschlossen und mit einem kleinen seitlichen, genau senkrecht gegen die Rohrachse gebohrten Loch unmittelbar vor dem abgerundeten Ende versehen. Das offene rückwärtige Ende der Sonde wird mit einer Drucklibelle durch einen Kautschukschlauch verbunden.

Das Verhalten einer Nadelsonde in einem Luftstrom an einem Orte, wo weder Über- noch Unterdruck herrscht, senkrecht zu den Stromlinien gestellt, ist nun folgendes, wenn wir die Nadel um ihre eigene Achse drehen. Unter φ wollen wir den Winkel verstehen, den die Richtung der Stromlinien mit der Richtung des Mundes, d. h. der Öffnung der Sonde bildet. Ist $\varphi = 0$, bläst also der Wind direkt in die Öffnung, so zeigt die Libelle maximalen Überdruck an; bei zunehmendem φ nimmt der Libellenausschlag ab und erreicht beim Winkel von 44^0 den Wert Null. Unter diesem Winkel zeigt also die Sonde gar keine dynamische Wirkung an. Beim Weiterdrehen wird der Druck negativ, es muß demnach aus dem Mund der Sonde Luft ausströmen, so daß eine Verminderung des spezifischen Druckes der Luft in der Sonde eintritt. Für $\varphi = 85^0$ ist der Unterdruck maximal, nachher nimmt er zuerst rasch, dann langsam wieder ab bis zu 180 Grad. Der maximale Unterdruck ist größer als der maximale Überdruck bei Null. Der

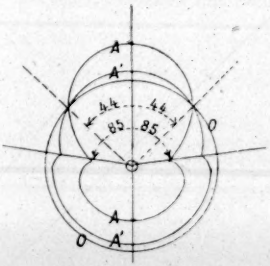
1) Fr. Ahlborn, Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes. Abhandl. aus d. Geb. d. Nat. Hamburg Bd. 17 (1902), ferner diese Zeitschr. 9, 201, 1908.
2) G. Eiffel, La résistance de l'air, Paris 1910.
3) Vgl. die Bemerkung, Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, II. S. 168, 1911.
4) A. Lafay, Compt. rend. **152**, 694, 1911.
5) L. Mach, Zeitschr. f. Luftschiffahrt u. Phys. d. Atmosphäre S. 129, 1896.
6) M. Marey, Comp. rend. **132**, 1291, 1901.
7) A. Tanakadaté, Compt. rend. **151**, 211, 1910.
8) Riabuchinsky, Bull. de l'inst. aérod. de Koutchino 1906 u. 1907.
9) Abbé, Report of the Chief Signal Officer **2**, 144, 1887.
10) O. Krell (jun.), Über Messung von dyn. u. stat. Druck bewegter Luft. München u. Berlin, Verlag Oldenbourg 1904.
11) F. E. Nipher, Trans. of the Acad. of sc. St. Louis 1898.
12) Vgl. Krell l. c. S. 19.
13) G. Recknagel, Ann. Phys. **10**, 677, 1880.
14) H. Zickendraht, Ann. Phys. (4) **35**, 73, 1911. Fortschr. d. nat. Forschung **4**, 45, 1912.

1) H. Zickendraht, l. c.

Unterdruck bei 180° hingegen ist kleiner wie der Überdruck bei 0°.

In einem Diagramm kann man die Verhältnisse nach Krell[1]) am einfachsten so darstellen, daß man auf den Radien für die verschiedenen φ den Überdruck von einem willkürlichen Nullkreis nach außen und den Unterdruck nach innen aufträgt. Alle diese Punkte zu einer geschlossenen Kurve vereinigt, liefern ein anschauliches Bild des Verhaltens der Nadelsonde.

Ändert man nun die Geschwindigkeit und nimmt das Diagramm wieder auf, so werden die Ausschläge am Manometer proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit geändert, aber, was nun wichtig ist, die Sonde zeigt wieder für φ gleich 44 Grad keinen Druck an, vorausgesetzt, daß an der betreffenden Stelle des Luftstromes keine Stauung also der statische Druck null existiert. In dem beigegebenen Diagramm (Fig. 1) ent-



Null-Kreis-Diagramm
(für die Nadelsonde)

Fig. 1.

sprechen die beiden Kurven den Geschwindigkeiten 4 und 6 m. Die Größe der Öffnung an der Sonde scheint keinen nennenswerten Einfluß auszuüben, nur darf die Öffnung im Verhältnis zur Sondendicke nicht zu groß werden. Eine Sonde von 1,6 äußerem und 1 mm innerem Durchmesser mit einer 0,2 mm weiten Öffnung gab dasselbe wie mit 0,4 mm; bei der Erweiterung auf 0,6 mm traten Unregelmäßigkeiten auf, die sich bei 0,8 mm unangenehm steigerten.

Offenbar tritt bei zu großer Öffnung des Mundes im Innern der Sonde Wirbelbildung auf. Bleibt man also unterhalb der Grenze, wo Störungen auftreten, so scheint die Größe der Öffnung belanglos.

Auf einen eingehenderen Vergleich verschiedener Nadelsonden wollen wir erst am Schluß eintreten, nachdem die Brauchbarkeit der Sonde an einem Beispiel gezeigt ist.

Was bedeutet nun der an der Drucklibelle abgelesene Überdruck für den Winkel $\varphi = 0°$? Bezeichnet man mit v die Geschwindigkeit des Luftstromes, mit h die Stauhöhe der Libelle in Zentimeter Wasser, mit δ die Dichte der Luft, mit g die Beschleunigung und mit p den dynamischen Druck, so gilt für die Recknagelsche Stauscheibe und für die Pitotröhre die Beziehung:

$$v = \sqrt{2gh} \text{ oder da } h\delta = p \quad v = \sqrt{\frac{2gp}{\delta}}.$$

Die Stauscheibe ist eine (unendlich) dünne ebene Scheibe von mindestens mehreren Quadratzentimeter großen Fläche, die in der Mitte eine kleine Öffnung besitzt, von der durch ein dünnes Röhrchen eine Leitung nach dem Manometer geführt wird. Die Pitotröhre ist eine vorn um 90° abgebogene Röhre mit der Öffnung gegen den Wind gekehrt. Krell zeigte, daß für alle Durchmesser und für die verschiedenen Formen der Öffnung zylindrisch-konisch zugespitzt, trichterförmig erweitert bei der Pitotröhre der obige Ansatz gilt, nur darf der nach vorn abgebogene Schenkel nicht zu kurz sein.

Das einfachste war, nun die Nadelsonde mit einer Stauscheibe oder einer Pitotröhre zu vergleichen. Dazu wurde auf der einen Seite der Drucklibelle die Nadelsonde und auf der andern eine Pitotröhre geschaltet und die beiden Sonden nebeneinander in den Luftstrom gestellt. Für mäßige Geschwindigkeiten wurde kein Unterschied beobachtet, der ins Gewicht fiel und die kleinen Abweichungen von Null wurden zuerst nur für zufällige Schwankungen gehalten, die im Luftstrom stets vorhanden sind. Erst durch eine systematische Untersuchung konnte dann später die Größe dieser Abweichungen gemessen werden, doch soll darüber erst später berichtet werden. Sehen wir also von diesem wenig Prozente betragenden Fehler ab, so können wir sagen, daß auch die Nadelsonde, wenn der Mund gegen den Wind steht, die Größe der Geschwindigkeit angibt nach der Gleichung

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Aus dem Verhalten der Sonde geht nun ohne weiteres die Verwendung der Nadelsonde zum Ausmessen eines beliebig gestörten aerodynamischen Feldes hervor. Für den Winkel $\varphi = 0°$ zeigt die Sonde maximalen Druck. Dieser Druck ist nun im allgemeinen die Summe des hier vorhandenen statischen Über- oder Unterdrucks plus dem dynamischen. Ist der statische Druck p_s, und der dynamische p_d, so ist der an der Libelle abgelesene Gesamtdruck

1) O. Krell, l. c.

$$P = p_s + p_d \text{ oder } P = p_s + \frac{\delta v^2}{2g}.$$

Man erhält also die Geschwindigkeit aus der Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\delta}(P - p_s)}.$$

Der statische Druck kann aber sofort ermittelt werden. Wir haben nur notwendig, die Sonde um den Winkel $\varphi = 44^0$ zu drehen, linksherum oder rechtsherum, so muß das, was die Libelle anzeigt, der statische Druck allein sein, denn in dieser Stellung wirkt ja die bewegte Luft nicht auf die Sonde. Diese Bedingung, daß für alle Geschwindigkeiten für den Winkel von 44^0 an einem Orte ohne statischen Druck Null zeigt, ist jedenfalls nicht mit mathematischer Genauigkeit erfüllt. Das Verhalten der Sonde erklärt sich dadurch, daß unter dem genannten Winkel sich die Stromlinien tangential an den Zylinder legen. Dies kann nicht bei allen Geschwindigkeiten v bei genau demselben Winkel eintreten, weil der Zylinder nicht ein vollkommener Stromlinienkörper ist. Er dürfte aber auf der Vorderseite sich einem solchen so sehr nähern, daß es begreiflich erscheint, daß wir mit unsern einfachen Hilfsmitteln eine Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten nicht finden konnten. Durch systematische Messungen läßt es sich vielleicht feststellen. Für die Praxis spielt es glücklicherweise keine Rolle.

Die Pitotröhre weist ein ähnliches Verhalten auf; sie zeigt den statischen Druck für $\varphi = 62{,}5^0$ statt für 44. aber sie bringt eine viel größere Störung im Feld hervor, besonders weil bei der Drehung das Knie in den Wind hineingedreht wird und ferner kann man wegen der Abbiegung niemals nahe an den zu untersuchenden Körper heran, was doch gerade wünschenswert ist, weil dort die interessantesten Änderungen auftreten.

Als Ergänzung sei noch bemerkt, daß es auch möglich ist die Geschwindigkeit und den statischen Druck aus dem Wert für $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 180^0$ zu berechnen, weil das Verhältnis

$$\text{Überdruck für } \varphi = 0^0$$
$$\text{Unterdruck für } \varphi = 180^0$$

konstant ist, unabhängig von der Geschwindigkeit.

Bezeichnet man den Gesamtdruck mit P_0 für $\varphi = 0$, den statischen mit p_s und den dynamischen mit p_0, wo der Index auch den Winkel gegen die Windrichtung angibt, so gilt

$$P_0 = p_s + p_0.$$

Da nun

$$p_0 = \frac{\delta v^2}{2g},$$

so ist

$$P_0 - p_s = \frac{\delta v^2}{2g};$$

ferner steht p_s zu p_{180} in einem konstanten Verhältnis, also

$$\frac{p_0}{p_{180}} = C,$$

so daß

$$P_{180} = p_s - C\frac{\delta v^2}{2g};$$

Subtrahiert man P_{180} von P_0 so ergibt sich

$$P_0 - P_{180} = \frac{\delta v^2}{2g}(1 + C),$$

woraus

$$v = \sqrt{\frac{2g(P_0 - P_{180})}{\delta(1 + C)}}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$P_0 = p_s + \frac{\delta v^2}{2g}$$

ein, so erhält man

$$p_s = \frac{C P_0 + P_{180}}{1 + C}.$$

Stellt man demnach die Sondenöffnung nicht nur in Richtung des maximalen Überdruckes und in die um 44^0 veränderte Lage, sondern auch noch in die um 180^0 gedrehte, so hat man eine Kontrolle, indem man den statischen Druck zweimal erhält.

Damit man die Sonde eichen kann, d. h. um den Winkel festzustellen, unter dem sie den statischen Druck anzeigt, muß man zuerst einen Ort im Luftstrom haben, von dem man weiß, daß dort kein statischer Druck herrscht. In einem Luftstrom, der durch einen Ventilator in die freie Luft geblasen wird, ist das keineswegs überall der Fall. Man kann den Ort einzig mit der Serschen Scheibe finden; das ist eine sehr dünne Scheibe, deren Fläche parallel zu den Stromlinien liegt. Sie erleidet auf der Oberfläche alsdann keine dynamische Wirkung. Bringt man in der Mitte eine kleine Öffnung an und verbindet diese Öffnung durch ein abgebogenes Röhrchen mit der Drucklibelle, so muß sie den statischen Druck angeben. Die schließlich verwendete Platte hatte einen Durchmesser vom 2,5 cm, war 0,4 mm dick und mit messerscharfem Rand versehen; ihre Meßöffnung von 0,3 mm war mit einer Zuleitungsröhre von 2,5 mm versehen. Die Zuleitung war halbkreisförmig umgebogen und endete in einem geraden Röhrenstück, das genau in die Ebene der Scheibe zu liegen kam, so daß es als Drehungsachse beim Umlegen der Platte um 180^0 dienen konnte. Mit dieser Platte wurde der Luftstrom abgesucht, bis man eine Stelle

gefunden hatte, an der die Scheibe in zwei um 180° verschiedenen Stellungen den Druckwert Null ergab.

Die Drucksonde von Zickendraht kann auch erst benützt werden, wenn sie an einer solchen Stelle im Luftstrom eingestellt ist, deshalb kann man sie nicht ohne weiteres dazu verwenden, um eine solche Stelle zu ermitteln.

Das Instrumentarium bestand aus folgenden Apparaten. Die Drucklibelle war mit einer Millimeterteilung längs beider Schenkel versehen. 1 mm Wasserdruck entsprach einer einseitigen Verschiebung von 6,8 mm.

Bei den Ablesungen wurden durchweg die Zehntel geschätzt, doch ist die Konstanz im allgemeinen nicht über zwei Zehntel. Als Flüssigkeit diente Alkohol. Die Sonde, mit der die folgenden Messungen durchgeführt wurden, war eine Stahlsonde, wie sie in der Chirurgie Verwendung findet, mit einem äußeren Durchmesser von 1,6 mm und einem inneren von 1,0 mm. Sie war in einem Koordinatenapparat[1]) befestigt und durch einen hohlen Halter mit der Drucklibelle durch einen Gummischlauch verbunden. Die Drehung der in einer Röhre F gelagerten Sonde um ihre Achse konnte an einem Teilkreis H (Fig. 2a u. 2b) abgelesen werden. Im freien Luftstrom stand der Zeiger D

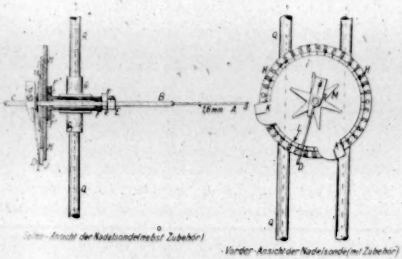


Fig. 2a u. 2b.

auf Null. Drehte man also die Sonde bis zum maximalen Überdruck, so kannte man die Windrichtung. Um nun von dieser Stelle aus rasch um einen Winkel von 44° nach beiden Seiten drehen zu können zur Ermittlung des statischen Druckes, war noch eine Scheibe mit drei Radialstrichen, die zweimal den Winkel von 44° einschlossen, mit einer Feder M leicht angedrückt. Den mittleren Strich brachte man zur Koinzidenz mit dem Zeiger und stellte auf die beiden um 44° abstehenden Striche K u. K' ein.

Differierten die beiden Ablesungen, so wurde bis zur Gleichheit korrigiert, dann kehrte man zum Mittelstrich zurück, um die Richtung des Windes genauer zu erhalten. Es ist leicht begreiflich, daß die erste Einstellung nicht sehr genau sein kann, weil beim maximalen Überdruck die Druckänderung pro Grad klein ist, aber in der 44°-Stellung gerade sehr groß. Dann drehte man die Sonde auch noch um 180° zur Kontrolle, wie oben auseinandergesetzt. Der Quotient des Überdruckes bei 0° zum Unterdruck bei 180° war für diese Sonde 0,85.

Der Ventilator mit 4 Flügeln B zur Erzeugung des Luftstroms war, wie Fig. 3 zeigt, in einen Blechkonus eingestellt und wurde durch einen kleinen Gleichstrommotor C von 220 Volt betrieben. Die

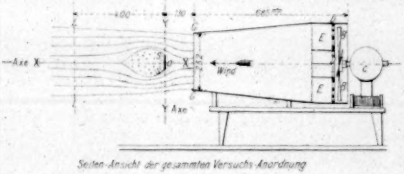


Fig. 3.

Breite des austretenden Luftstroms war 25,2 cm Die Schwankungen im Gleichstromnetz waren bei den Messungen sehr lästig und verschlechterten die Meßgenauigkeit. Ventilatoren mit Flügeln erzeugen keinen parallelen Luftstrom sondern einen helikoidalen, d. h. es findet eine Drehbewegung statt, wodurch in der Achse des Stromes ein Unterdruck entsteht. Durch mühsames Ausprobieren gelang es durch Einsetzen eines Parallelrichters E und einer Siebwand D die Drehbewegung aufzunehmen und die größere Geschwindigkeit am Rand zu vermindern, so daß der Luftstrom fast zylindrisch, schwach divergierend mit praktisch gleichmäßiger Geschwindigkeit über dem ganzen Querschnitt war. Die Siebwand bestand aus einem Blech mit Löchern, die nach außen immer kleiner wurden und so außen die Geschwindigkeit im richtigen Maß herabsetzten. Der Parallelrichter war eine Anordnung von radial gestellten Lamellen, die außen zahlreicher waren wie innen.

Zunächst wurde der ungestörte Luftstrom untersucht. Vor der Öffnung des Ventilators in den beiden Entfernungen von 10 cm und 52 cm wurde der Querschnitt des Luftstromes mit der Sonde genauer ausgemessen. Es zeigte sich dabei, daß in der größeren Distanz durch Reibung der bewegten an der unbewegten Luft eine Verbreiterung des bewegten Querschnittes stattgefunden hatte und dadurch die Geschwindigkeit verringert worden war.

Die Berechnung der Geschwindigkeit und

1) H. Zickendraht, l. c.

des statischen Druckes erfolgte nach der oben angegebenen Formel

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\delta}(P - p_s)}$$

worin P und p_s in Millimeter Wasserdruck anzugeben sind. Die auf der Libelle abgelesenen Verschiebungen mußten zur Umrechnung in Millimeter Wasser mit 0,0147 multipliziert werden. Der Barometerstand schwankte während der Zeit der Messungen um 740 mm, so daß man unter Berücksichtigung der mittleren Temperatur des Versuchsraumes von 18° C. den Wert von 1,180 kg/m³ einsetzen kann. Nimmt man noch für g den Wert 9,81 m/sec², so wird

$$\sqrt{\frac{2g}{\delta}} = 4{,}074$$

so daß man schreiben kann

$$V = 4{,}074\sqrt{P - p_s}\,.$$

Da die gemessenen Überdrucke nicht über 2,5 mm betrugen, so durfte die dadurch hervorgerufene Änderung der Dichte der Luft vernachlässigt werden.

In der folgenden Tabelle findet man unter y die Entfernung der Sondenöffnung von der Achse des Luftstroms in Millimetern, ferner den Gesamtdruck P aus den nebenstehenden Skalenteilen der Libelle, dann den statischen Druck p_s mit den entsprechenden Skalenteilen und zuletzt die daraus berechnete Windgeschwindigkeit.

Ausmessung des Luftstroms.

	y	Ablesung des Manometers: Gesamtdruck, Weg auf der Skala	P	Stat. Druck, Weg auf der Skala	p_s	Berechnung nach Formel $V = 4{,}074\sqrt{P - p_s}$: Geschwindigkeit V
	mm	mm	mm	mm	mm	m/sec
Entferng. v. Ventilatorkonus 1 cm	0	17,75	2,61	0,95	0,14	6,40
	+ 20	17,6	2,59	0,8	0,12	6,40
	+ 40	17,15	2,52	0,8	0,12	6,32
	+ 60	17,15	2,52	0,75	0,11	6,34
	+ 80	17,33	2,55	0,55	0,08	6,40
	+ 100	17,5	2,57	0,27	0,04	6,47
	+ 120	17,33	2,55	0,14	0,02	6,47
	+ 124	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Entfernung 52 cm	0	16,4	2,41	— 0,4	— 0,059	6,4
	+ 20	16,2	2,39	— 0,3	— 0,044	6,35
	+ 40	16,0	2,35	— 0,2	— 0,029	6,29
	+ 60	15,7	2,31	0	0	6,20
	+ 80	14,9	2,20	0	0	6,05
	+ 100	13,8	2,03	0	0	5,81
	+ 110	11,9	1,76	0	0	5,40
	+ 120	8,3	1,23	0	0	4,52
	+ 130	5,9	0,87	0	0	3,80
	+ 140	4,0	0,585	0	0	3,11
	+ 150	2,5	0,376	0	0	2,50
	+ 160	1,5	0,223	0	0	1,92
	+ 170	0,85	0,124	0	0	1,43
	+ 180	0,35	0,05	0	0	0,91

In den beiden Querschnitten wurden noch andere Radien ausgemessen, doch sind die Zahlen von den genannten so wenig verschieden, daß wir von der Wiedergabe absehen können. Sie beweisen nur, daß der Luftstrom gleichmäßig war. Im ersten Querschnitt erkennt man, daß bis auf eine Entfernung von 120 mm von der Achse die Geschwindigkeit konstant gleich 6,4 m/sec war, um dann innerhalb 4 mm auf Null abzufallen. An dieser Stelle ist also der Luftstrom noch scharf abgegrenzt. Im entfernteren Querschnitt hingegen ist in der Mitte die Geschwindigkeit noch dieselbe, nimmt aber gleich ab, anfangs allerdings langsam, weiter außen aber rascher, doch ist sie selbst in 180 mm Entfernung von der Achse noch nicht Null. Der Luftstrom ist somit auf dem Weg von 500 mm merklich verbreitert und nach außen diffuser geworden. Im ersten Querschnitt ist in der Mitte noch etwas Überdruck im entfernteren etwas Unterdruck. Die Stelle mit dem statischen Druck Null war in einer Entfernung von 120 mm vor dem Konus, wie die Messungen mit der Stauscheibe gezeigt hatten.

Um die Brauchbarkeit der Sonde zu demonstrieren, wurde eine Messung des aerodynamischen Feldes einer kreisrunden Platte von 80 mm Durchmesser senkrecht vom Wind getroffen durchgeführt. Die Eisenplatte von 80 mm Durchmesser und 0,5 Dicke wurde an einem Halter an die Stelle, wo der statische Druck Null war, genau senkrecht zu den Stromlinien befestigt. Bei der runden Platte genügt es natürlich, die Messungen in jedem Querschnitt nur in einem Radius durchzuführen, weil ja aus Gründen der Symmetrie jeder Radius dasselbe zeigen muß. Man braucht deshalb die Nadelsonde nur um die eigene Achse drehbar und, wenn sie horizontal aufgestellt ist, vertikal verschiebbar zu montieren. Sechs Querschnitte an der Vorderseite (Luvseite) und neun auf der Rückseite (Leeseite) wurden vermessen. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfang in die Mitte der Platte, zieht die X-Achse durch die Mitte des Luftstromes und rechnet die positiven X in Richtung des Windes, legt man ferner die Y-Achse in vertikaler Richtung nach oben, so ist der Ort der Sonde durch Angabe von X und Y eindeutig bestimmt. In der folgenden Tabelle findet man die beobachteten Werte des statischen Druckes p_s des Gesamtdruckes P sowie den Winkel α, d. h. die Veränderung der Windrichtung gegen die ursprüngliche ohne jegliche Korrekturen. Ferner ist die Windgeschwindigkeit für alle diese Punkte aus der gegebenen Formel berechnet.

Die Winkel sind so angegeben, daß, wenn

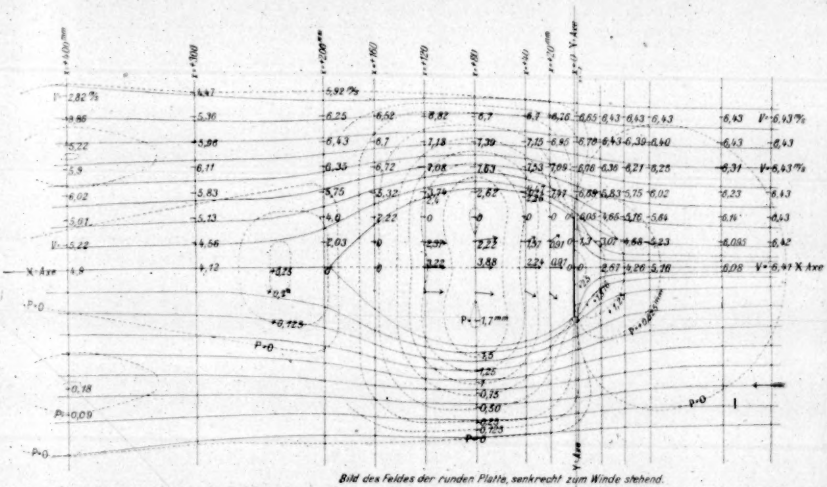


Bild des Feldes der runden Platte, senkrecht zum Winde stehend.
Die Isobaren sind punktirt der Stat° Druck P in mm Wasser angegeben, die Stromlinien sind vollgezeichnet, die Geschwindigkeit V in % angegeben.

Fig. 4.

der Wind im Sinne des Uhrzeigers abgelenkt worden ist, die Winkel negatives Vorzeichen erhalten haben, im andern Fall positives. Im „toten Wasser" kommen deshalb Winkel vor, die positiv sind und größer als 180° wegen der Wirbelbildung.

In der graphischen Darstellung der Tabellenwerte in Fig. 4 sind die Stromlinien ausgezogen, die Isobaren (Kurven gleichen statischen Druckes) punktiert gezeichnet. Die Windgeschwindigkeit ist in Meter pro Sekunde hineingeschrieben. Im toten Wasser sind durch Pfeile

Luvseite.

mm	y=	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	130	mm
X = — 120	P_0	2,5	2,5	2,52	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,5	2,5	2,5	2,51	2,5	mm
	p_s	0,28	0,276	0,285	0,258	0,23	0,20	0,157	0,124	0,10	0,05	0,0	0,01	0,0	mm
	α														Grad
	v	6,08	6,087	6,095	6,12	6,14	6,19	6,23	6,27	6,31	6,36	6,43	6,43	6,43	m sec
X = — 60	P	2,5	2,49	2,5	2,5	2,5	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,5	2,51	2,5	
	p_s	0,90	0,87	0,84	0,74	0,58	0,46	0,32	0,2	0,15	0,05	0,02	0,01	0,0	
	α	0	— 2,0	— 3,9	— 5,2	— 5,9	— 5,0	— 5,8	— 5,0	—4,45	— 3,9	— 3,2	—2,05	— 1,5	
	v	5,16	5,185	5,235	5,39	5,64	5,83	6,02	6,19	6,25	6,35	6,40	6,43	6,43	
X = — 40	P	2,51	2,50	2,50	2,51	2,52	2,31	2,5	2,5	2,49	2,49	2,49	2,49	2,5	
	p_s	1,41	1,31	1,18	1,06	0,92	0,71	0,5	0,32	0,17	0,09	0,02	—0,01	0,0	
	α	0—	— 4,0	— 8,0	—10,4	— 10,6	— 9,5	— 8,4	— 7,4	— 6,5	— 5,8	— 5,0	— 3,5	— 3,0	
	v	4,26	4,45	4,68	4,9	5,16	5,46	5,75	6,02	6,21	6,31	6,39	6,43	6,43	
X = — 20	P	2,51	2,5	2,5	2,5	2,51	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,49	2,5	2,5	
	p_s	2,08	2,02	1,93	1,6	1,21	0,81	0,45	0,18	0,04	—0,01	—0,01	0,0	0,0	
	α	0	—10,1	—20,2	—24,3	—24,3	—21,5	—17,0	—13,2	—10,4	— 8,2	— 6,6	—4,4	— 3,8	
	v	2,67	2,82	3,07	3,86	4,65	5,31	5,83	6,21	6,36	6,43	6,43	6,43	6,43	
X = — 10	P	2,5	2,51	2,51	2,52	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,49	2,5	2,49	2,48	
	p_s	2,48	2,41	2,26	1,82	1,29	0,83	0,45	0,18	—0,01	—0,09	—0,13	—0,14	—0,12	
	α	0	— 80	— 55	—42,8	— 34	—20,7	— 21	—15,7	— 12	— 9,1	— 7,2	— 5,0	— 4,2	
	v	0,54	1,24	2,03	3,4	4,5	5,26	5,83	6,2	6,43	6,54	6,61	6,61	6,57	
X = — 2	P	2,49	2,5	2,5	2,51	2,51	2,5	2,5	2,5	2,48	2,46	2,46	2,45	2,45	
	p_s	2,49	2,48	2,4	2,02	0,31	— 0,05	—0,19	—0,25	—0,30	—0,30	—0,31	—0,21	—0,11	
	α	0	— 90	— 88	— 85	— 78	— 49	—27,3	—19,5	— 14	—10,4	— 7,9	— 5,5	— 4,9	
	v	0	0,54	1,30	2,87	6,05	6,5	6,69	6,76	6,77	6,76	6,76	6,65	6,58	

Leeseite.

$X = +2$	$y =$	0	20	30	40	42	45	50	60	80	100	120	130	mm
	P	−0,81	−0,81	−0,81	−0,81	2,5	2,5	2,5	2,48	2,45	2,45	2,45	2,43	mm
	p_s	−0,81	−0,81	−0,81	−0,81	−1,03	−0,7	−0,3	−0,22	−0,28	−0,26	−0,10	−0,02	mm
	α					−34	−33	−30,5	−25	−14,5	−7,4	−4,6	−3,5	Grad
	v	0	0	0	0	7,03	7,3	6,82	6,7	6,74	6,72	6,5	6,35	m/sec
$X = +20$	$y =$	0	20		40		51	55	60	80	100	120	130	
	P	−0,82	−0,77		−0,81		−0,30	1,30	2,5	2,5	2,5	2,46	2,4	
	p_s	−0,87	−0,82		−0,81		−0,85	−0,05	−0,87	−0,54	−0,4	−0,21	−0,14	
	α	+180	+220				−23	−22,2	−20,8	−12,3	−6,3	−4,7	−2,2	
	v	0,912			0		3,01	6,11	7,47	7,09	6,95	6,76	6,48	
$X = +40$	$y =$	0	20	40	50	55	60	65	70	80	100	120	130	
	P	−0,89	−1,05	−1,20	−1,2	−0,88	0	1,10	2,48	2,5	2,5	2,45	2,45	
	p_s	−1,20	−1,20	−1,20	−1,2	−1,20	−1,20	−1,17	−1,14	−0,93	−0,59	−0,25	−0,09	
	α	+180	+200			−14,3	−15,3	−14	−12,8	−9,9	−5,2	−2,5	−1,6	
	v	2,24	1,57	0	0	2,25	4,47	6,14	7,72	7,53	7,15	6,7	6,49	
$X = +80$	$y =$	0	20		40	50	60	70	80	83	100	120	130	
	P	−0,74	−1,33		−1,7	−1,7	−1,22	1,02	2,21	2,49	2,49	2,45	2,45	
	p_s	−1,65	−1,08		−1,7	−1,7	−1,03	−1,55	−1,32	−1,23	−0,80	−0,30	0	
	α	+180	+186				+2	+0,6	0	0	+0,15	+0,30	+0,20	
	v	3,88	2,22		0	0	2,62	6,53	7,63	7,82	7,39	6,70	6,35	
$X = +120$	$y =$	0	20	40	48	55	60	70	80	90	100	120	130	
	P	−0,6	−0,93	−1,33	−1,33	−0,90	−0,35	0,85	2,10	2,47	2,48	2,48	2,43	
	p_s	−1,23	−1,27	−1,33	−1,33	−1,25	−1,20	−1,05	−0,92	−0,78	−0,63	−0,32	−0,18	
	α	+180	+180			+20	+16,5	+10,2	+6	+4	+3	+1,3	+0,9	
	v	3,32	2,37	0	0	2,4	3,74	5,61	7,08	7,35	7,18	6,82	6,58	
$X = +160$	$y =$	0	20	30	40	60	76	80	90	100	120	130		
	P	−0,40	−0,43	−0,40	−0,13	1,30	1,86	2,35	2,45	2,46	2,42	2,4		
	p_s	−0,40	−0,43	−0,43	−0,43	−0,41	−0,39	−0,37	−0,33	−0,29	−0,15	−0,08		
	α			+32	+33	+19,4	+14,1	+10	+7,3	+5,7	+4,1	+3,5		
	v	0	0	0,66	2,22	5,32	6,11	6,72	6,80	6,7	6,52	6,4		
$X = +200$	$y =$	0	20	40	60	80	100	120	140					
	P	0,16	0,41	1,11	2,03	2,38	2,40	2,30	2,10					
	p_s	0,16	0,16	0,14	0,03	−0,07	−0,10	−0,05	0					
	α		+23,7	+19,5	+14,3	+9,8	+6	+2,2	0					
	v	0	2,03	4,0	5,75	6,35	6,42	6,25	5,9					
$X = +300$	$y =$	0	20	40	60	80	100	120	140					
	P	1,03	1,25	1,59	2,03	2,16	2,05	1,70	1,20					
	p_s	0	0	0	−0,02	−0,09	−0,09	−0,04	0					
	α	0	+1,5	+1,2	+0,8	+0,6	0	−1,6	−3,8					
	v	4,12	4,56	5,13	5,83	6,11	5,96	5,36	4,47					
$X = +400$	$y =$	0	20	40	60	80	100	120	140					
	P	1,45	1,65	1,87	2,07	1,92	1,47	0,80	0,45					
	p_s	0	0	−0,03	0,11	−0,18	−0,10	−0,10	−0,03					
	α	0	+1,3	+1,0	+0,6	+0,4	0	−1,6	−3,7					
	v	4,9	5,22	5,61	6,02	5,9	5,22	3,86	2,82					

einige Windrichtungen angegeben, wodurch man die Wirbel (Wirbelring) erkennt.

Diese Ergebnisse sind von Herrn Gegauff[1] in seiner Dissertation wiedergegeben. Dort findet man auch noch einige weitere Angaben über experimentelle Einzelheiten.

Zu der Zeichnung der Stromlinien ist noch zu bemerken, daß genau genommen diese Kurven nur zu zeichnen sind, wenn ungeheuer viele Punkte bestimmt würden, damit man sozusagen von Punkt zu Punkt dem Pfeil, also der Richtung des Windes, nachgehen könnte, ähnlich wie bei der Konstruktion der Kraftlinien eines Magneten. Es wäre wünschenswert, daß man in jedem Punkte noch die Krümmung (Krümmungsradius) der Stromlinie angeben könnte. Wir werden später darüber berichten wie auch das möglich ist. Das Problem soll mit der gleichen Sonde gelöst werden; es muß nur noch experimentell ausgearbeitet werden.

Nachdem die Brauchbarkeit der Nadelsonde nachgewiesen war, wurden von einem von uns (Hagenbach) mehrere Sonden untersucht, zunächst um festzustellen, inwieweit der Maximaldruck beim Winkel $\varphi = 0$ mit dem dynamischen Druck, wie ihn die Pitotröhre oder die Stauscheibe liefert, übereinstimmt. Für diese beiden weiß man durch eingehende Untersuchungen, daß für den dynamischen Druck gilt

$$p_d = \frac{\partial v^2}{2g},$$

wo p_d die an der Libelle abgelesene Druckhöhe

1) K. Gegauff, Sondenmessungen im aerodynamischen Feld. Dissertation. Basel 1916.

darstellt. Zuerst ergab ein Vergleich vor dem Ventilator, daß eine Pitotröhre mit einem umgebogenen Ende von 4 cm (äußerer Durchmesser der Röhre 2,3 innerer 2,0 mm) weder gegen eine Stauscheibe von 2,5 cm Durchmesser mit einer bogenförmigen Zuführung von hinten, noch gegen eine Prandtlröhre mit einer Scheibe von 18 mm Durchmesser irgendeinen meßbaren Unterschied im Druck anzeigte. Man ist also wohl berechtigt anzunehmen, daß alle drei Sonden den Anforderungen genügen und an einem Ort ohne statischen Druck nach obiger Formel die Windgeschwindigkeit liefern.

Früher ist festgestellt worden, daß aber die Pitotröhre einen zu kleinen Wert für den Druck liefert, wenn das dem Winde zu abgebogene Ende zu kurz ist. Faßt man die Nadelsonde als Pitotröhre auf, so hat sie ein so kurzes vorgebogenes Stück wie die Dicke der Wandung. Man mußte also erwarten, daß keine genaue Übereinstimmung zwischen der Nadelsonde und der Pitotröhre bestehe. Diese Abweichung sollte nun ermittelt werden.

Die ersten Messungen wurden so ausgeführt, daß mit dem einen Ende der Libelle die Nadelsonde, mit dem andern die Stauscheibe verbunden wurde und beide in nicht zu großer Entfernung voneinander in einem Querschnitt des Luftstromes aufgestellt wurden. Da aber trotz aller Sorgfalt die Geschwindigkeit nicht in jedem Punkt eines Querschnittes absolut gleich war, so konnten die kleinen Abweichungen zwischen Stauscheibe und Nadelsonde nicht einwandfrei eruiert werden. Diese Differentialmethode hatte zwar den Vorteil, daß die Schwankungen des Ventilators keine Rolle spielten, aber man mußte darauf verzichten, weil Verschiebungen einer Sonde im Querschnitt immer wahllose Schwankungen zeigten. Man stellte deshalb die beiden Sonden nacheinander an genau dieselbe Stelle des Feldes, was mittels eines Anschlages ohne Schwierigkeit auf etwa 1 mm Genauigkeit erreicht wurde. Wegen der zeitlichen Änderungen des Ventilators bedurfte es einer ganzen Serie von Ablesungen bei beständigem Vertauschen der Sonden. Man las im Interesse der Geschwindigkeit nur auf einer Seite der Libelle ab, vertauschte aber in der Mitte der Beobachtungsreihe die Verbindungsschläuche zur Libelle, so daß auch Ungleichheiten des linken und rechten Libellenarmes herausfielen. Die mit einer Lupe ausgeführten Druckablesungen wurden auf 0,2 Skalenteile (Millimeterteilung auf Glas) geschätzt. Die wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte betrugen im Durchschnitt etwa 0,1 mm.

Für diese Versuche war eine etwas größere Windgeschwindigkeit wünschenswert und es wurde deshalb ein größerer kräftiger dreiflügliger Ventilator von 50 cm Durchmesser verwendet. Er war auch, wie der früher benützte, in einen Konus eingebaut, der sich auf 41 cm Länge auf einen Durchmesser von 35 cm verjüngte; daran schloß sich ein zylinderförmiges Rohr von 52 cm Länge. In letzterem war ein Gleichrichter, bestehend aus einem System von horizontalen und vertikalen Lamellen abgeschlossen mit einem Drahtnetz eingesetzt. Der Luftstrom wurde auf diese Weise recht homogen.

Die Windgeschwindigkeit betrug bei den meisten Messungen 7,4 m/sec, was einem Libellenausschlag von etwa 23 mm entsprach. Der Konstanz zuliebe wurde manchmal der Motor statt mit 220 Volt Stadtstrom mit 180 Volt Akkumulatorenstrom betrieben, wodurch die Windgeschwindigkeit nur noch 6 m betrug, entsprechend dem kleineren Ausschlag von 16,5 mm.

Von den meisten Sonden wurden auch die Diagramme aufgenommen in den interessanten Gebieten von 5 zu 5, in den andern von 10 zu 10 Grad. Dazu wurde die betreffende Sonde in der Achse eines Teilkreises drehbar befestigt.

In der folgenden Tabelle findet man die Bezeichnung, Abmessungen und Material der Sonden, die Größe der Öffnung, die Windgeschwindigkeit, bei der gemessen wurde. Der Winkel φ_0 gibt den Winkel an, bei dem die Öffnung von dem Wind nicht beeinflußt wird, bei dem die Sonde also nur den statischen Druck angeben kann. Die folgende Rubrik zeigt das Verhältnis des Unterdruckes, wenn die Sondenöffnung in Richtung des abfließenden Windes zum Überdruck, wenn der Sondenmund nach dem Wind hin sieht. Dieser Quotient ist auch unabhängig von der Windgeschwindigkeit. Die letzte Kolonne endlich gibt in Prozenten die Abweichungen des Druckes, wie man ihn mit der betreffenden Nadelsonde abliest, gegenüber dem mit der Stauscheibe ermittelten.

Vergleich der Sonden.

Bezeichnung der Sonde	Durchmesser äußerer	Durchmesser innerer	Durchmesser der Öffnung	Windgeschwindigkeit	φ_0	Unterdruck $\varphi=180^0$ / Überdruck $\varphi=0^0$	Abweichung in Prozenten gegen Stauscheibe für $\varphi=0$
I Messing	2,5	1,5	0,4	6,0	41^0	0,96	13
				7,4	46,7	0,88	
II Neusilber	1,7	1,0	0,3	5,5	46,7	0,85	5,6
III Neusilber	1,7	1,0	0,5	7,4	45,7	0,83	4,6
IV Neusilber	1,3	0,7	0,3	7,4	45	0,85	3,9
V Neusilber	1,3	0,7	0,5	7,4	50.3^0	0,80	5,4
VI Stahl	1,6	1,0	0,4	4,0	44	0,85	6,3
				6,0	44		

Sehen wir von der Sonde I ab, so sind die Abweichungen gegen die Stauscheibe rund 5 Pro-

zent. Die Genauigkeit der Messung dürfte etwa 1 Prozent sein, so daß wir auf die Stellen hinter dem Komma keinen großen Wert legen möchten. Nehmen wir also für die dünnen Sonden von 1,3, 1,6 und 1,7 mm 5 Prozent Abweichung an, so muß man für diese Sonden schreiben statt

$$p_d = \frac{\partial v^2}{2g} \cdots 1{,}05\, p'_d = \frac{\partial v^2}{2g},$$

wo p'_d den experimentell ermittelten Wert darstellt. Die Windgeschwindigkeit v berechnet sich demnach durch

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot 1{,}05\, p'_d}{\partial}}.$$

Für unsern Fall

$$v = 4{,}074 \sqrt{1{,}05\, p'_d} = 4{,}074 \sqrt{1{,}05 (P - p_s)}$$
$$= 4{,}175 \sqrt{P - p_s}.$$

Die Windgeschwindigkeit wird also ohne Berücksichtigung dieser Abweichung um 2,5 Prozent zu klein gefunden. Die in der früheren Tabelle angegebenen Werte der Geschwindigkeit wären demnach alle um 2,5 Prozent zu erhöhen. Die dort angeführten Messungen sind mit der Sonde VI durchgeführt. Bei Geschwindigkeiten unter etwa 3 m ist diese Abweichung auf unserer Drucklibelle nicht mehr sichtbar.

Die Winkel φ_0 sind bei den verschiedenen Sonden nicht gleich. Eine einfache Beziehung zu den übrigen Größen läßt sich jedoch nicht erkennen. Da bei diesem Winkel offenbar die Stromlinien sich tangential anlegen, so ist erklärlich, daß zufällige kleine Unregelmäßigkeiten an den Rändern der Öffnung Änderungen von einigen Graden hervorrufen können. Um die Theorie dieser Sonde genau aufzustellen, muß der Vergleich mit dem stromumflossenen Zylinder durchgeführt werden.

Es ist auch noch denkbar, daß die Entfernung der Öffnung vom abgerundeten Ende der Sonde eine Einwirkung ausübt. Bis jetzt haben wir nicht weiter darauf geachtet, wir wollen aber doch die Größen für die untersuchten Sonden angeben. Die Entfernungen vom äußersten Ende der Sonde bis zur Mitte des Mundes betrugen bei Sonde

I	II	III	IV	V	VI
1,0	1,7	1,7	1,2	1,0	1,0 mm

Die aufgenommenen Diagramme zeigten immer eine mehr oder weniger ausgesprochene Unsymmetrie, was ja ebenfalls durch kleine Unregelmäßigkeiten in der Bohrung erklärt werden kann. Die Unsymmetrie war immer am ausgesprochensten beim maximalen Unterdruck. Da dieser maximale Unterdruck größer ist wie der maximale Überdruck für $\varphi = 0$, so muß man annehmen, daß beim maximalen Unterdruck Wirbel in die Sondenöffnung hineinblasen, was aus dem Stromlinienverlauf am Zylinder verständlich erscheint. In dieser Stellung zeigten sich auch leicht kleine Schwankungen am Manometer. Die Sonde in dieser Stellung zum Messen zu gebrauchen, erscheint deshalb nicht empfehlenswert. Wir lassen in der folgenden kleinen Tabelle noch die Winkel φ_m für maximalen Unterdruck folgen, soweit sie genau ermittelt wurden und ferner die Quotienten maximalen Unterdrucks zu maximalem Überdruck.

	φ_m	max. Unterdruck / max. Überdruck
Sonde I	83°	1,28
„ II		1,23 links bei $v = 7{,}4$ m/sec 1,20 links bei 5,5 m/sec 1,21 rechts bei $v = 7{,}4$ m/sec 1,20 rechts bei 5,5 m/sec
„ III		1,22 links 1,16 rechts
„ IV	83°	1,23 „ 1,22 „
„ V		1,17 „ 1,08 „
„ VI	85°	1,22

Durch diese Untersuchungen dürften die Haupteigenschaften der Nadelsonde klargelegt und die Überlegenheit gegenüber andern Sonden erwiesen sein.

Basel, Dezember 1916.

(Eingegangen 25. Dezember 1916.)

Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs.

Bemerkung zur gleichnamigen Arbeit von R. Plank[1].

Von Léon Schames.

Während die Abkühlung beim Drosselvorgang von der spezifischen Wärme der Substanz abhängt, ist die dabei auftretende Wärmemenge von ihr unabhängig. Wird die Substanz durch den Drosselvorgang bis zum idealen Gaszustand, d. h. streng genommen bis $p = 0$, entspannt, so ist die auftretende Wärmemenge

$$Q = \int_0^p \left\{ T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right\} dp.$$

Die Kurven $Q = 0$, sowohl als auch $\frac{dQ}{dp} = 0$, nennt man „Inversionskurven des Drosselvorgangs", weil bei höheren Temperaturen als dann Q, bzw. $\frac{dQ}{dp}$ negativ wird. Der Begriff der Inversionskurve wird also doppelt gebraucht, und Plank glaubt daher, diesen Begriff klären zu müssen. Tatsächlich hat aber

1) R. Plank, diese Zeitschr. 17, 521, 1916.

schon Kuenen[1]) aus dem gleichen Grunde Vorsicht bei der Ableitung der Inversion empfohlen, ohne allerdings klar die beiden Inversionskurven zu trennen; letzteres scheint von verschiedenen Seiten[2]) geschehen zu sein, auch ich habe es vor einiger Zeit getan[3]), und zwar habe ich die Kurve

$$Q = 0 \text{ integrale Inversionskurve, und}$$
$$\frac{dQ}{dp} = 0 \text{ differentiale Inversionskurve}$$

genannt. Plank führt dafür die dem Sinne nach analoge Bezeichnung endliche, bzw. elementare Inversionskurve ein. Auch auf den eigentlich selbstverständlichen Umstand, daß das Maximum des Integraleffekts auftritt, wenn der Differentialeffekt Null ist, habe ich schon hingewiesen.

Da nach Obigem die Inversionskurven von der spezifischen Wärme der Substanz unabhängig sind, so sind zu ihrer Bestimmung keinerlei kalorische Messungen nötig, auch nicht etwa diejenige des Kühleffekts bei der Drosselung, was häufig übersehen wird. Vielmehr kann man die Inversionskurven direkt aus den Zustandsgrößen p, v, T ableiten, wie ich das loc. cit. für CO_2, C_2H_4, O_2, N_2, Luft und H_2 getan habe. Dort habe ich außer den beiden Inversionskurven noch zwei andere, charakteristische Kurven behandelt, nämlich diejenige der Minima der pv = Isothermen $\left(\frac{dpv}{dp} = 0\right)$ und diejenige gleicher Ordinaten wie die Anfangspunkte der pv-Isothermen, in welchen also gerade wieder das Idealgasgesetz gilt. Die erstere nannte ich wie üblich

$$\text{Boylekurve: } \frac{dpv}{dp} = 0,$$

die letztere nannte ich aus obigem Grunde

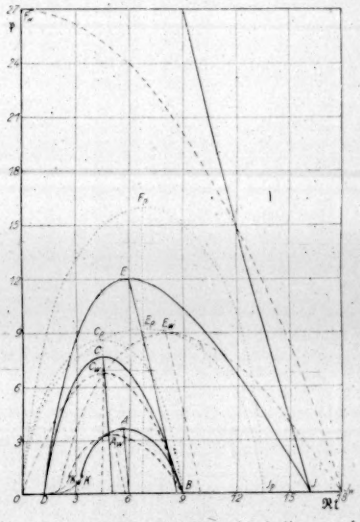
$$\text{Idealkurve: } pv = RT.$$

Mit dieser letzteren Kurve hat sich auch Plank befaßt, er hat sie jedoch Boylekurve genannt. Wir wollen hier die früher eingeführte Bezeichnung beibehalten. Zu dieser gehört auch noch, daß wir „Inversions"- bzw. „Boyletemperatur" kurzweg die betreffenden Temperaturen im Avogadroschen Zustand (also für $p = 0$) nennen, denn in diesem Zustand schneiden sich die beiden Inversionskurven im Inversionspunkt bzw. die Boyle- und Idealkurve im Boylepunkt.

Nun widersprechen die Plankschen Inversionskurven und dessen Idealkurve denjenigen, die früher (loc. cit.) aus den experimentellen Isothermen abgeleitet wurden; ja sogar die Boyle- und die Inversionstemperatur nach Plank sind mit der Erfahrung[1]) gänzlich unvereinbar. Reduzieren wir die Zustandsgrößen, indem wir sie durch die kritischen Größen dividieren, also

$$\mathfrak{t} = \frac{T}{T_k}, \quad \mathfrak{p} = \frac{p}{p_k},$$

so wird nach Plank die reduzierte Inversionstemperatur für Luft $\mathfrak{t}_J = \frac{1320}{133} = 9{,}92$ und die reduzierte Boyletemperatur $\mathfrak{t}_B = \frac{880}{133} = 6{,}62$, während sich tatsächlich für die Gruppe der zweiatomigen Substanzen (mit Ausnahme von H_2) $\mathfrak{t}_J = 4{,}80$, $\mathfrak{t}_B = 2{,}667$ ergibt. Um die Gestalt der wirklichen Kurven mit den Plankschen zu vergleichen, geben wir folgende Figur. Dabei



haben wir, um den Vergleich auf die aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung folgenden charakteristischen Kurven ausdehnen zu können, $\mathfrak{p}$ nicht als Funktion von $\mathfrak{t}$, sondern von $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ gezeichnet, wobei $\mathfrak{R}\left(= \frac{RT_k}{mp_kv_k}\right)$ die „reduzierte Gaskonstante" ist. Dadurch wird erreicht, daß alle Punkte im Avogadroschen Zustand, also speziell Boyle- und Inversionspunkt, für alle Stoffe korrespondierende Punkte wer-

1) J. P. Kuenen, Die Zustandsgleichung 1907, S. 112.
2) Lit. bei Kamerlingh Onnes u. Keesom, Enzykl. d. math. Wiss. 5, I, X, S. 842.
3) L. Schames, Elster- u. Geitel-Festschrift 1915, S. 287.

1) Lit. z. B. bei Kamerlingh Onnes u. Keesom, Enzykl. d. math. Wiss. 5 I, X, S. 897 u. 943.

den, wogegen allerdings der kritische Punkt in diesem Diagramm nicht als korrespondierender Punkt erscheint. (Letzterer Nachteil verschwindet im $pv-p$, und erst recht im $pv-\frac{1}{v}$-Diagramm, welches als einfachstes, früher [loc. cit.] am ausführlichsten behandelt wurde.)

Nach der van der Waalsschen Zustandsgleichung werden die vier charakteristischen Kurven Parabeln, die wir in der Figur gestrichelt gezeichnet haben. $\mathfrak{R}$ ist hier bekanntlich $^8/_3$.

Kurve I. Die Boylekurve ist eine schiefe Parabel, sie beginnt im Boylepunkt B bei $\mathfrak{R}t = 9$, erreicht ihren Scheitelpunkt in A_w und mündet links vom kritischen Punkt K_w in die Dampfdruckkurve OK_w.

Kurve II. Die Idealkurve ist eine gerade Parabel, die ebenfalls in B beginnt, in C_w ihren Scheitel hat und im Nullpunkt endet.

Kurve III. Die differentiale Inversionskurve ist eine schiefe Parabel, im Inversionspunkt J_w ($\mathfrak{R}t = 18$) beginnend, Scheitel in E_w, und in die Dampfdruckkurve mündend.

Kurve IV. Die integrale Inversionskurve ist eine gerade Parabel, ebenfalls in J_w beginnend und im Scheitelpunkt F_w endend.

Auffallend ist, daß die Achsen der beiden schiefen Parabeln I und III die gleiche Neigung (nämlich $\frac{9}{2}$) haben, und daß die Parabeln II und III sich im Scheitel von II schneiden.

Die vier charakteristischen Kurven der Erfahrung sind stark ausgezogen. Für alle Substanzen ist der Boylepunkt mit dem van der Waalsschen identisch, der Inversionspunkt liegt jedoch bei $\mathfrak{R}t = 16{,}2$. Die Figur gilt für die Gruppe der zweiatomigen Gase (mit Ausnahme von H_2) für die $\mathfrak{R} = {}^{27}/_8$[1]).

Die Kurven I, II und III ergeben sich als schiefe Parabeln, und zwar zeigen die Achsen von I und II dieselbe Neigung (nämlich 12), während die Neigung von III gleich derjenigen nach van der Waals ist.

Kurve IV ist im dargestellten Bereich annähernd geradlinig; mit weiter abnehmender Temperatur nähert sie sich der Druckachse asymptotisch (vgl. Fig. 4 der zit. Arbeit).

Im Gegensatz zur Folgerung aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung durchschneiden sich die Parabeln II und III nicht; sie münden vielmehr gemeinsam im Punkte D in die Dampfspannungskurve OK.

Mit diesen beiden Kurvenscharen sind die Plankschen Kurven direkt nicht zu vergleichen, da, wie wir oben sahen, die Boyletemperatur 2,48 mal, die Inversionstemperatur 2,07 mal so groß sind, als die wirklichen. Um dennoch einen Vergleich durchführen zu können, haben wir den Temperaturmaßstab so verändert, daß der Boylepunkt bei $\mathfrak{R}t = 9$ richtig wiedergegeben wird, d. h. wir haben alle Temperaturen 2,48 mal kleiner genommen, als den Plankschen Formeln entspricht. Die sich so ergebenden Plankschen Kurven haben wir punktiert eingetragen.

Während Kurve I von Plank nicht untersucht wurde, sind die übrigen Kurven II, III und IV nach ihm gerade Parabeln, die im Nullpunkt enden. Wie wir gesehen haben, endet von den Kurven der Erfahrung keine im Nullpunkt, auch ergeben sich Kurve II und III tatsächlich als schiefe Parabeln. Besonders unrichtig wird die Kurve IV, während bei dieser nach Plank für $t = 0$, $p = 0$ sein soll, gilt nach van der Waals $p = 27$, und nach der Erfahrung $p = \infty$. Was den Plankschen Schnittpunkt der Parabeln II und III anbetrifft, so sahen wir, daß dieser nach van der Waals wohl, nach der Erfahrung aber nicht auftritt.

Zum Schlusse seien die Gleichungen der charakteristischen Kurven im $p-\mathfrak{R}t$-Diagramm in einer Tabelle zusammengestellt.

	Gleichungen der charakteristischen Kurven im p-$\mathfrak{R}t$ Diagramm nach		
	der van der Waalsschen Zustandsgleichung	der Erfahrung	der Plankschen Formel (reduziert u. mit dem Faktor 2,48 korrigiert.)
Boylekurve	$\mathfrak{R}t = 5{,}817 - \frac{2p}{9} \pm 3{,}18\sqrt{1-\frac{p}{3{\cdot}375}}$	$\mathfrak{R}t = 6{,}00 - \frac{p}{12} \pm 3{,}00\sqrt{1-\frac{p}{3{,}67}}$	—
Idealkurve	$\mathfrak{R}t = 4{,}50\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{p}{6{,}75}}\right)$	$\mathfrak{R}t = 5{,}067 - \frac{p}{12} \pm 3{,}933\sqrt{1-\frac{p}{7{,}67}}$	$\mathfrak{R}t = 4{,}50\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{p}{8{,}67}\right)^2}\right)$
Differentiale Inversionskurve	$\mathfrak{R}t = 10 - \frac{2p}{9} \pm 8\sqrt{1+\frac{p}{9}}$	$\mathfrak{R}t = 8{,}667 - \frac{2p}{9} \pm 7{,}533\sqrt{1-\frac{p}{12}}$	$\mathfrak{R}t = 6{,}75\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{p}{9{,}25}\right)^2}\right)$
Integrale Inversionskurve	$\mathfrak{R}t = 18\sqrt{1-\frac{p}{27}}$	$\mathfrak{R}t \sim 16{,}2 - 0{,}267\,p$ für $0 < p < 30$.	$\mathfrak{R}t = 6{,}75\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{p}{16}\right)^2}\right)$

1) L. Schames, Verh. d. D. phys. Ges. **18**, 35, 1916.

(Eingegangen 7. Dezember 1916.)

Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Léon Schames zu meiner Arbeit „Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs“ [1].

Von R. Plank.

Die in den vorstehenden Bemerkungen entgegengehaltene Arbeit des Herrn Schames, die im vorigen Jahre in der Elster- und Geitel-Festschrift veröffentlicht wurde, ist mir leider entgangen, da mir die Neuerscheinungen auf diesem Gebiet in den Kriegsjahren nur mangelhaft zugänglich waren. Auch jetzt fehlt mir die Möglichkeit zum eingehenden Studium dieser Arbeit, so daß ich nur auf den Wortlaut der vorstehenden Bemerkungen Bezug nehmen kann.

Herr Schames indentifiziert das Integral

$$\int_0^p \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v \right] dp$$

mit der Wärmemenge Q, die bei der Abdrosselung eines Gases bis zum Druck $p = 0$ auftritt. Daraus würde folgen

$$dQ = \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v \right] dp.$$

Dagegen ergibt sich aus dem ersten Hauptsatz

$$dQ = du + p\,dv$$

durch Einführung des Wärmeinhalts $i = u + pv$

$$dQ = di - v\,dp$$

und somit für eine Drosselkurve mit $di = 0$

$$dQ = -v\,dp$$

an Stelle des obigen Ausdrucks.

Von den beiden Kurven, die Herr Schames als Inversionskurven bezeichnet, deckt sich nur die eine, und zwar die „differentiale Inversionskurve“

$$\frac{dQ}{dp} = T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = 0$$

mit meiner elementaren Inversionskurve

$$\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = 0.$$

Dagegen ist die „integrale Inversionskurve“

$$\int_0^p \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v \right] dp = 0$$

nicht übereinstimmend mit meiner endlichen Inversionskurve $\Delta = 0$. Aus der Gleichung

$$T^2\left(\frac{\partial (v/T)}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = c_p \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T,$$

die ich in § 4 meiner Arbeit entwickelte, folgt nämlich, daß die integrale Inversionskurve von Schames in der Form

$$\int \left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T dp = 0$$

geschrieben werden kann, während ich die Kurve $\Delta = 0$ untersuchte, welcher die Bezeichnung „endliche“ oder „integrale“ Inversionskurve eher zukommt.

Herr Schames bemerkt, daß die von mir im Zahlenbeispiel des § 7 entwickelten Inversionskurven und die Boylesche Kurve stark von den Erfahrungswerten abweichen. Dabei wird aber der Zweck meiner Arbeit gänzlich verkannt. Wie ich gleich zu Anfang bemerkt habe, lag es mir nur daran, einen Beitrag zur Theorie der Luftverflüssigungsmaschinen zu liefern. Wenn ich also im letzten Abschnitt die entwickelten theoretischen Zusammenhänge auf Luft anwendete, so kam hierbei nur das technisch wichtige Gebiet von Zimmertemperatur bis etwa -190^0 in Betracht. Dieses Gebiet wurde im Anwendungsbeispiel noch weiter dadurch eingeschränkt, daß ich als Ausgangspunkt meiner Zahlenrechnungen die Versuchsreihen von Bradley und Hale wählte, die sich auf das Temperaturgebiet von 0 bis -100^0 bei Drücken von 70 bis 200 Atm. auf der Hochdruckseite der Drosselstelle beziehen. Es ist ganz klar, daß die daraus entwickelten thermischen und kalorischen Größen nur in diesem sowie im angrenzenden Bereich Anspruch auf Zuverlässigkeit haben; ich habe nachgewiesen, daß die Übereinstimmung in diesen Grenzen eine recht gute ist (spezifische Wärme, elementare Abkühlung). Eine Extrapolation von 0^0 auf 900^0 und darüber hinaus ist natürlich nicht zulässig. In dem von mir untersuchten Gebiet ist die Übereinstimmung der elementaren Inversionskurve mit derjenigen von van der Waals, wie meine Figur 3 zeigt, eine recht befriedigende. Die Figur läßt ferner erkennen, daß die Abweichungen bei höheren Temperaturen immer größer werden. Es ist daher auch gänzlich unzulässig, beim Vergleich der beiden Kurven die höchste Inversionstemperatur als Bezugspunkt zu nehmen. Für die hohen Temperaturen war bei meiner Arbeit eine Übereinstimmung weder verlangt noch angestrebt.

Ebensowenig war es meine Aufgabe, den Verlauf der Boyleschen Kurve neu festzulegen; auch hier kam für mich nur das eng definierte Temperaturgebiet in Frage.

Bei der endlichen Inversionskurve $\Delta = 0$ ist ein Vergleich überhaupt nicht möglich, weil die „integrale Inversionskurve“, wie oben erwähnt, eine von der ersteren abweichende Bedeutung hat.

(Eingegangen 31. Dezember 1916.)

1) Diese Zeitschr. 17, 521, 1916.

Biprismen in der Photometrie.

Von J. Koenigsberger.

H. Seemann beschreibt in dieser Zeitschr. **17**, 622, 1916, einige Formen von Biprismen. Hierbei sind prinzipiell zwei Klassen zu unterscheiden. Die eine Art von Biprismen, besser Doppelplatten, läßt die Strahlenwinkel unverändert; zu ihnen gehört die Doppelplatte nach H. v. Helmholtz und die von W. Autenrieth und mir angewandte Abänderung derselben (Fig. 3 bei H. Seemann), die seit etwa 8 Jahren an einem von Medizinern und Chemikern benützten Kolorimeter der Firma F. Hellige in Freiburg i. B. angebracht wird. Die zweite Klasse Biprismen verändert den Winkel zweier Strahlenbündel gegeneinander und bedingt dadurch ein Zusammenschieben entfernter Gegenstände, dessen Ausmaß vom Abstand des Gegenstandes vom Biprisma abhängt. Beispiel hierfür ist die Verwendung des Prismas im Polarisationsphotometer von A. König (Neukonstruktion von F. Martens). — Die Kombination der Wirkung Doppelplatte—Doppelprisma (Fig. 1 u. 2 von H. Seemann) ist für die Firma F. Hellige seit $^3/_4$ Jahren in die Reichsgebrauchsmusterrolle eingetragen.

(Eingegangen 20. Dezember 1916.)

Stoßionisation der Gase durch Wärmebewegung.

Von M. Wolfke.

In dieser Zeitschrift hat F. v. Hauer[1]) unter demselben Titel eine Betrachtung veröffentlicht, die beweisen soll, daß die Zahl der durch Stoßionisation der Wärmebewegung erzeugten Ionen bei Zimmertemperatur viel zu klein ist, um die Restionisation zu erklären, falls man auch für neutrale Moleküle den aus den experimentellen Daten für Ionen bekannten Schwellenwert der kinetischen Stoßenergie benutzt[2]). P. Langevin und J. Rey[3]) haben gezeigt, daß auch bei der Annahme einer beliebigen unteren Grenze für die zur Ionisation notwendige Stoßenergie die Restionisation dadurch nicht erklärt werden kann, da in diesem Falle eine sehr rasche Zunahme dieser Ionisation mit der Temperatur eintreten müßte, was in krassem Widerspruch zu den bekannten Tatsachen steht.

Ich habe die Hypothese der tangentiellen Stöße seinerzeit nur im Anschluß an die Abhandlung von Langevin und Rey veröffentlicht[1]), um zu zeigen, daß es möglich ist die Definition der ionisierenden Stöße so zu wählen, daß ihre Zahl mit der Temperatur äußerst schwach variiert. Ich habe jedoch diesen Gedanken nicht weiter verfolgt, da mir das Versuchsmaterial zu unsicher erschien, um darauf eine exakte Theorie zu bauen. Inzwischen wurden neue Messungen im Laboratorium von Mc Lenan ausgeführt und K. H. Kingdon[2]) hat, auf diese Messungen gestützt, meine Hypothese der tangentiellen Stöße durch die Annahme einer unteren Grenze für die tangentielle Geschwindigkeitskomponente ergänzt, und dadurch eine gute Übereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen erzielt.

Ich möchte in dieser Note nur kurz darauf hinweisen, daß die Hypothese der tangentiellen Stöße den üblichen Vorstellungen über die Stoßionisation nicht widerspricht, sondern sie im Gegenteil in plausibler Weise ergänzt.

Die modernen Atommodelle deuten nämlich darauf hin, daß die Stabilität der im Atom gebundenen Elektronen in verschiedenen Richtungen verschieden ist, so daß es vollkommen denkbar erscheint in die Bedingungen der Stoßionisation nicht nur die kinetische Energie allein aufzunehmen, sondern auch die Richtung des Stoßes zu berücksichtigen. Dies könnte in allgemeinster Weise so geschehen, daß man die untere Grenze für die zur Ionisation notwendige Stoßenergie als Funktion der Stoßrichtung setzen würde. Es genügt jedoch anzunehmen, daß oberhalb des bekannten Schwellenwertes der Stoßenergie bei jeder Stoßrichtung eine Ionisation möglich ist, daß aber unterhalb dieses Schwellenwertes nur bei einer bevorzugten Richtung der kleinsten Stabilität des gebundenen Elektrons eine Ionisation eintreten kann. Diese bevorzugte Richtung wäre nach meiner Hypothese diejenige der tangentiellen Stöße. Bei Zimmertemperatur kommt, wie auch F. v. Hauer bewiesen hat, die erste Ionisationsmöglichkeit gar nicht in Frage, es bleibt also nur die Möglichkeit einer tangentiellen Stoßionisation. Diese Möglichkeit ist, wie Kingdon gezeigt hat, durch eine untere Grenze der tangentiellen Geschwindigkeitskomponente begrenzt, was mit einem zweiten unteren Schwellenwert der kinetischen Stoßenergie äquivalent ist.

1) F. v. Hauer, diese Zeitschr. **17**, 583, 1916.
2) Meines Wissens hat darauf zum erstenmal K. Bergwitz in seiner Habilitationsschrift hingewiesen, (Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn 1910.)
3) P. Langevin und J. Rey, Le Radium **10**, 142, 1913.

1) M. Wolfke, Le Radium **10**, 265, 1913.
2) K. H. Kingdon, Phil. Mag. (6), **32**, 396, 1916.

Von diesem Standpunkt aus wird die Stoßionisation durch zwei Schwellenwerte charakterisiert: ist der kleinere Schwellenwert der kinetischen Stoßenergie überschritten, so kann die Stoßionisation vorderhand nur vermittelst der tangentiellen Stöße stattfinden — ist aber der zweite größere Schwellenwert (der bis jetzt allein bekannt war) erreicht, so kann jeder Stoß unabhängig von der Stoßrichtung zur Ionisation führen.

Wenn ich auch keinen Widerspruch zwischen dieser Auffassung und den modernen Anschauungen auf diesem Gebiete sehe, so bin ich weit davon entfernt, diese Hypothese heute schon als gesichert anzunehmen — es müßten noch weitere experimentelle Resultate vorliegen und vor allem die Abhängigkeit der Restionisation von der Temperatur in noch weiteren Grenzen untersucht werden.

Zürich, Dezember 1916.

(Eingegangen 31. Dezember 1916.)

Die Gültigkeitsgrenze des Fermatschen Prinzips; Kritik der Theorie der Refraktion und Extinktion von Wellen in inhomogenen Körpern.

Von Karl Uller.

Wir kennen Wellenbewegung in Körpern, deren Beschaffenheit sich von Ort zu Ort stetig ändert: Licht- und Schallbewegung in der Atmosphäre, Bebenbewegung in der Erde. Die auffälligste Eigenschaft dieser Art von Strahlen, nämlich ihre Gekrümmtheit, gewahren wir bei Lichtstrahlen am leichtesten, sei es indirekt durch die scheinbaren Objektversetzungen und -verkehrungen, sei es direkt in trüben Medien, wo die Bahn der Welle durch das seitlich zerstreute Licht von dem seitlich beobachtenden Auge unmittelbar wahrgenommen wird. Auch Schallstrahlen in der Atmosphäre sind gekrümmt, wie wir aus den Zonen des Schweigens schließen müssen, die bei mächtigen Schallerregungen auftreten. Bebenwellen sind als gekrümmt noch nicht einwandfrei nachgewiesen; doch wird es wohl auch bei diesen der Fall sein, denn die Inhomogenität der Dichte und der Elastizität der Erde ist so gut wie gewiß und ihre Proportionalität, welche geradlinige Ausbreitung zur Folge haben würde, nicht gerade wahrscheinlich. Theoretisch ist Strahlengekrümmtheit eine notwendige und allgemeine Eigenschaft von Wellen, die durch stetig inhomogene Körper laufen.

Wie hat man sich bisher die Tatsache der Gekrümmtheit erklärt?

Der nächstliegende und auch wirklich begangene Gedankenweg ist folgender. In einem homogenen Körper geht bei beugungsfreien Wellen die Energiebewegung nachweislich geradlinig vor sich. Man wird sich nun den gekrümmten Strahl in einem inhomogenen Körper aus lauter kleinen geradlinigen Wellenstückchen zusammengesetzt denken dürfen, deren jedes in einer kleinen homogenen Schicht verläuft. Zu der Schichtung des Körpers kommen wir durch folgende Überlegung. Der Einfluß des Körpers auf die ihn durchsetzende Welle, die wir einfarbig voraussetzen, drückt sich in einer Größe aus, die wir den Körperparameter a nennen wollen, wobei wir indessen nicht übersehen dürfen, daß a außerdem auch noch von der Frequenz und Dämpfung der Welle abhängt. Hat nun der Körper, wie wir zunächst einmal annehmen wollen, keine wellenlöschende Eigenschaft, dann ist a reell und der Körper zerfällt in ein Schichtensystem mit den Grenzflächen $a = \text{const.}$, $a + \delta a = \text{const.}$ usw. Jede dieser unendlich dünnen Schichten darf nach diesem Gedankengang als homogen angesehen werden. Infolgedessen ist das auf eine Schicht entfallende Strahlstückchen eine Welle in einem homogenen Mittel. Die Wellenbewegung in einem stetig inhomogenen Körper kommt nach dieser Schichtenmethode zustande durch kontinuierliche Brechung einer Welle, wie sie Stück für Stück im homogenen Mittel gebaut sein würde. Dabei erklärt sich die kontinuierliche Richtungsänderung des Strahles eben durch die kontinuierliche Brechung. Die auf dieser Vorstellung aufgebaute Wellentheorie heißt deshalb die Refraktionstheorie. Die Richtungsänderung des Strahles berechnet sie auf Grund des Snelliusschen Brechungsgesetzes für zwei angrenzende homogene Körper. Danach stehen die Winkel i_1 und i_2 der beiden Strahlen in bezug auf das Flächenlot zueinander in der Beziehung

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \qquad (1)$$

wenn n den (absoluten) Brechungsindex eines Körpers gegen das Vakuum bezeichnet oder in unserer Sprache den obengenannten Körperparameter. Dies Gesetz ist hier anzuwenden auf zwei benachbarte Strahlelemente in zwei benachbarten Mitteln. Für festgehaltene n_1 und i_1 ergibt sich aus (1) durch logarithmische Differentiation

$$di = -\operatorname{tang} i \cdot d \log n. \qquad (2)$$

Hat man drei oder mehr Strahlelemente, so ist zu beachten, daß im allgemeinen auch das Parametergefälle grad n, also das Schichtflächenlot, zwischen je zwei Elementen seine Richtung ändert. Diese Drehung $d\varphi$ kommt noch zu di

hinzu, wenn man die Abweichung des dritten Elements gegen das erste berechnen will. Bekanntlich läßt sich das Snelliussche Brechungsgesetz aus dem Satz vom ausgezeichneten Lichtweg ableiten, wonach der wirkliche optische Weg zwischen zwei Bahnpunkten dadurch ausgezeichnet ist, daß bei unendlich kleiner Variation seiner Elemente die optische Weglänge $\int_{P_1}^{P_2} n\,ds$ höchstens um Glieder zweiter Ordnung von ihm abweicht. Wir wollen diesen Satz der Kürze halber das Fermatsche Prinzip nennen. Auf ihm fußend kann man also nach der Schichtenmethode in allgemeiner Weise die Differentialgleichungen aufstellen, denen die „Trajektorien" zu genügen haben, wenn gegeben sind, die Parameterflächen sowie die Richtung des Strahles in einem Punkt. Diese Aufgabe ist schon seit langem gelöst (Hamilton, um 1825).

Verhältnismäßig recht spät (1880, Rayleigh) stellten sich Bedenken gegen die Schichtenauffassung ein. Wenn es wahr ist, daß das Fortschreiten der Welle an kontinuierliche Brechung gebunden ist, dann muß unweigerlich an jeder Parameterfläche eine unendlich schwache reflektierte Welle auftreten, und da der schwachen Reflexionen an den unendlich vielen Schichten unendlich viele sind, so muß ein endlicher Betrag zustandekommen. Diese „innere Reflexion" müßte beobachtbar sein entweder unmittelbar oder an der Schwächung des durchgehenden Strahls. Unmittelbar ist noch niemals etwas bemerkt worden und mittelbar sind die Versuche nicht aussichtsvoll in der Deutung wegen des Mitspiels der immer etwas vorhandenen Extinktion. Damit ist aber ein innerer Widerspruch in der Refraktionstheorie sehr wahrscheinlich gemacht. Noch einer andern Schwierigkeit steht diese Theorie ratlos gegenüber. Im allgemeinen treten nämlich mehrere, voneinander unabhängige, Körperparameter auf, gibt es also mehrere, sich schneidende, Schichtensysteme. Wie soll da die Brechung vor sich gehen? Oder ist ein gewisses kombiniertes Hauptsystem allein für die Brechung maßgebend? Wo sind aber dann die Bedingungen für dieses herzuholen? Diese Schwierigkeiten sind zugleich auch verwunderlich, denn die Folgerungen aus der Refraktionstheorie scheinen bisher befriedigend von den Erfahrungen bestätigt zu werden, wenigstens allemal, wenn nicht wellenlöschende Körper in Frage kommen.

Aus dieser mißlichen Lage kann man nur herauskommen, wenn man sich bewußt wird, daß immer der historische Weg in den Naturwissenschaften ein induktiver Pfad ist. So auch hier. Man ist von Vorstellungen ausgegangen, die von Wellen in homogenen und durchsichtigen Körpern gewonnen worden sind und sich bewährt haben, und hat sie verwertet in dem allgemeineren Falle von Wellen in inhomogenen und wellenlöschenden Körpern. Ist das erlaubt? Die Antwort kann nur das deduktive Verfahren geben, nämlich die Herleitung der Wellenbewegung aus den für inhomogene und wellenlöschende Körper geltenden Grundgleichungen. Diese geben auf unsere Frage nach der Existenz innerer Reflexion sofort klaren Bescheid. Merkwürdig, daß man ihn bisher nicht abgelesen hat. Das kam aber daher, daß man die Grundgleichungen immer nur in der für die Sondervoraussetzung ebener Schichtung gebotenen Form verwendete und sogleich nach Lösungen ausschaute. Die Grundgleichungen in allgemeiner Darstellung sagen nun allgemein aus, daß von innerer Reflexion in einem inhomogenen Körper ebensowenig die Rede sein kann wie in einem homogenen, wenn neben den Körperparametern auch deren Gefälle stetig sind. Ausführlicheres darüber findet man a. a. O.[1]) Gibt es keine innere Reflexion, so kann auch die Schichtenmethode unmöglich richtig sein. In der Tat ist das nachweisbar. So kommen wir zu dem zwingenden Schluß: Mit der bestimmten Leugnung einer inneren Reflexion fällt die Refraktionstheorie!

Wie aber finden wir nun den Weg zu den Gesetzmäßigkeiten der gekrümmten Strahlen, den deduktiven, an dessen Ausgangspunkt nur die allgemeinen Grundgleichungen stehen?

An Versuchen hat es nicht ganz gefehlt. Sie sind indessen als gescheitert anzusehen. Mangels eines Leitseils müssen in ihnen nämlich Annahmen gemacht werden. Diese laufen in allen Versuchen darauf hinaus, daß die Welle als in den kleinsten Teilchen aus Planwellenelementen bestehend gehalten wird. Diese Auffassung entspricht aber nicht der Wirklichkeit, wie ich zeigen konnte[2]). Der zum Ziel führende Leitsatz nun ist der ideale Begriff der Umkehrbarkeit der Welle[3]), zum Ausdruck gebracht in allen Bedingungen, welche die Welle zu erfüllen hat. Um verständlich zu werden, ist es vorerst notwendig auf den Begriff und Bau einer physikalischen Welle einzugehen.

Eine Skalarwelle von elementarer Schwingungsform hat die Gestalt

1) K. Uller, Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwingungsform. (Diese Zeitschr. 17, 369, 1916.)

2 u. 3) K. Uller, Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle. II. (Diese Zeitschr. 17, 610, 1916.)

$$\Omega = \omega \cdot e^{-(\nu'' t + \Phi'')} \cos(\nu' t + \Phi'); \quad (3')$$

beispielsweise stellt Ω nach Hinzufügung eines zeitfreien Gliedes die Dichteschwankungen in einer Verdünnungswelle vor. Die Größen ω, Φ' und Φ'' sind reine Ortsfunktionen, ν' die Frequenz der Schwingung und ν'' ihre (positive oder negative) Dämpfung. Das Argument des Kosinus nennen wir die Phase von Ω, ferner ω den Wellenskalar und $e^{-(\nu'' t + \Phi'')}$ den Amplitudenfaktor, welch beide zusammen die Amplitude der Schwingung in einem Punkte der Welle bestimmen. Die Bedingungen, welche die Welle zu erfüllen hat, enthalten nun niemals die Funktionen Φ' und Φ'' selber, sondern stets ihre Gradienten. Dementsprechend müssen wir definieren:

$$\mathfrak{w}' = -\operatorname{grad}\Phi' \text{ und } \mathfrak{w}'' = -\operatorname{grad}\Phi''.$$

Es besagt nun: $\nu' t + \Phi' = \text{const.} = c'$, daß der Phasenwert c', mit wachsender Zeit t zu wachsenden Φ'-Werten getragen wird, und zwar mit der Geschwindigkeit $\nu'/\mathfrak{w}'$, wenn wir in Richtung von $\mathfrak{w}'$ messen. Aus dem Grunde nennen wir die Flächen $\Phi' = \text{const.}$ die im Raum festliegenden Isophasenflächen und $\mathfrak{w}'$ die Isophasennormale. Ferner besagt in Verbindung mit $c' = \text{const.}$: $\nu'' t + \Phi'' = \text{const.} = c''$, daß der Amplitudenfaktorwert $e^{-c''}$ mit wachsender Zeit bei Dämpfung zu wachsenden Φ''-Werten getragen wird mit der Relativgeschwindigkeit $\nu''/\mathfrak{w}''$, wenn wir in Richtung von $\mathfrak{w}''$ messen; relativ zur Phasengeschwindigkeit, weil konstantes c'', nur sofern c' konstant ist, konstanten Beitrag zum Wellenskalar ω liefert. Wir nennen die Flächen $\Phi'' = \text{const.}$ die im Raum festliegenden Isodynamenflächen und $\mathfrak{w}''$ die Isodynamennormale. Die kinematischen Vektoren $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ bilden im allgemeinen einen, meist stumpfen, Winkel miteinander. Derselbe geht in ihre Beträge ein und verursacht dadurch eine bedeutende Verwickeltheit des Wellenbaues, indem die Phasengeschwindigkeit, die Wellenlänge, der Wellenskalar und die Strahlung von ihm abhängig sind. Kurz zusammengefaßt ist nun die Deutung der Skalarwelle (3'): Die Phasen von Ω laufen von Isophasenebene zu Isophasenebene nach steigenden Φ'-Werten. Ist die Schwingung nicht permanent, also $\nu'' \neq 0$, so findet in der Welle auch eine relative Amplitudenbewegung statt; sie verläuft bei gedämpften Schwingungen in Richtung der Isodynamennormale, bei zeitlich ansteigenden Schwingungen entgegengesetzt.

Die allgemeine Theorie der Wellen elementarer Schwingungsform erfordert zu ihrer Bewältigung, wie ich an anderen Orten durch die Tat gezeigt habe, die Verwendung komplexer Ausdrücke in Verbindung mit konjugiert-komplexen, welch letztere wir durch ein oben angesetztes Sternchen kennzeichnen wollen. Der allgemeine Ausdruck für eine Skalarwelle von elementarer Schwingungsform lautet dann:

$$\begin{aligned}\Omega &= {}^1/_2 \{\omega \cdot e^{i(\nu t + \nu t)} + \omega^* \cdot e^{-i(\nu^* + \nu^* t)}\} \\ &= e^{-(\nu'' t + \Phi'')} \\ &\quad \times \{\omega' \cdot \cos(\nu' t + \Phi') - \omega'' \cdot \sin(\nu' t + \Phi')\},\end{aligned} \quad (3)$$

Seine Deutung ist etwas verwickelter als die des Unterfalls (3'), insofern als die kinematische Phasengeschwindigkeit nun auch von dem komplexen Wellenskalar ω abhängig ist. Man sieht, daß Φ' und Φ'' nur in der Verbindung $\Phi' + i\Phi'' = \Phi$ auftreten, was natürlich sich auch auf $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ überträgt. Wir wollen $\mathfrak{w}' + i\mathfrak{w}'' = \mathfrak{w}$ kurz das Wellennormalenpaar heißen; seine Definition folgt weiter unten. Unsere Deutungen und Begriffsbildungen gelten sinngemäß auch in einer Vektorwelle von elementarer Schwingungsform, deren allgemeiner Ausdruck ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{V} &= {}^1/_2 \{\mathfrak{v} \cdot e^{i(\nu t + \nu t)} + \mathfrak{v}^* \cdot e^{-i(\nu^* + \nu^* t)}\} \\ &= e^{-(\nu'' t + \Phi'')} \\ &\quad \times \{\mathfrak{v}' \cdot \cos(\nu' t + \Phi') - \mathfrak{v}'' \cdot \sin(\nu' t + \Phi')\},\end{aligned} \quad (4)$$

wobei $\mathfrak{V}$ in einer Ebene rotiert. Die spiralische Rotation geht bei permanenten Schwingungen ($\nu'' = 0$) in eine harmonisch durchlaufene, elliptische über.

Wie an anderen Orten[1]) weiter ausgeführt ist, sind die Ausdrücke (3) und (4) rein kinematischen Inhalts; in dem physikalischen Gebilde: Welle ist wesentlich die Energiefortpflanzung. Demgemäß sind alle Verschiebungen auf die Richtung der momentanen Energieströmung zu beziehen. Da diese meist turbulent ist, so hat man für praktische Zwecke die Richtung des definitiven Energiefortgangs zu nehmen. Diese Bezugnahme ist auch maßgebend für den Begriff der Transversalität und den aus der Phasengeschwindigkeit abzuleitenden Begriff der Wellenlänge.

In einer gegebenen Skalarwelle (Ω) ist bei gewähltem N-P. der Zeitzählung das Produkt $(\omega e^{i\Phi})$ gegeben. Wir können aber dies Produkt ebensogut schreiben: $(\omega_1 e^{i\Phi_1})$ usw. Von vornherein wäre somit einer der Skalare ω und Φ willkürlich und der andere von diesem abhängig. Das aber kann unmöglich so bleiben, wenn (3) mehr sein soll als ein rein mathematischer Ansatz. Gerade der Zwang, diese mathematische Willkürlichkeit in dem kinematischen Ansatz für eine Welle zu beseitigen, verrät uns die Existenz eines Wellenprinzips. Dasselbe lautet:

1) K. Uller, Die kinematische, die physikalische Welle. (Jahrb. f. drahtl. Tel. 1915, S. 438.) — Grundlegung I. § 1 und 2. (Diese Zeitschr. 17. 168, 1916.)

Soll der Ansatz (3) eine Welle darstellen, so muß Φ von ω unabhängig sein.

Entsprechendes gilt in einer Vektorwelle ($\mathfrak{V}$) zwischen Φ und dem Betrage von $\mathfrak{v}$. Mit Rücksicht darauf, daß in den Bedingungen, welche eine Welle zu erfüllen hat, niemals Φ, sondern sein Gefälle $\mathfrak{w}$ auftritt, nimmt der genannte Satz die Form[1]) an:

In einer Skalarwelle (Ω) ist der Vektor $\mathfrak{w}$ unabhängig von ω, in einer Vektorwelle ($\mathfrak{V}$) unabhängig vom Betrage von $\mathfrak{v}$.

Dann und nur dann sind $\mathfrak{w}$, ω und $\mathfrak{v}$ kinematische Größen, die wir das Wellennormalenpaar, den Wellenskalar bzw. den Wellenvektor benennen, wobei die beiden letztgenannten vom N-P. der Zeitzählung abhängig sind.

Das genannte Wellenprinzip nun wirkt sich in allen Bedingungen aus, welchen die Welle unterworfen ist. Erst diejenige Gesamtheit von Gleichungen, in denen dies Prinzip zum Ausdruck gebracht ist, bildet das Gleichungssystem der betreffenden Welle von elementarer Schwingungsform. Für elektromagnetische Wellen, Scherungs- und Verdünnungswellen in gewöhnlichen isotropen Körpern sind diese Gleichungssysteme im § 5 der genannten Grundlegung zu finden. Sie lassen erkennen, daß in Beugungswellen, die ebenda gekennzeichnet werden, eine Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$ selbst dann auftritt, wenn sie durch konservative Körper laufen. Da nun ihr Winkel gegen die Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ nur ausnahmsweise ein gestreckter ist, ergeben sich einige bemerkenswerte Folgerungen. Zunächst kann bei Beugungswellen selbst in konservativen Körpern keine Rede davon sein, daß die Strahlung mit der Isophasennormale gleichgerichtet ist. Auch Betrag der Strahlung sowie Phasengeschwindigkeit und Wellenlänge sind durch die Spreizung des Wellennormalenpaars wesentlich beeinflußt. Ferner fordert für elektromagnetische Wellen die Solenoidalität des Feldes, daß selbst in konservativen Körpern die elektrische oder die magnetische Feldstärke in Beugungsgebieten geradlinig nur senkrecht sowohl zur Isophasen- als auch zur Isodynamennormale schwingen kann. Entsprechendes gilt für Scherungswellen. In Verdünnungswellen schließlich schwingen in Beugungsgebieten die Teilchen in festen Körpern ausgesprochen elliptisch, in Flüssigkeiten in ausgesprochen elliptisch-spiralischen Bahnen um die Isophasennormale als Achse.

Wir können nunmehr zu unserem Thema zurückkehren. Für Wellen aller Art zeigen die Gleichungssysteme folgende gemeinsame Eigenschaft: Wellen sind nicht umkehrbar, d. h. ersetzen wir in ihnen $\mathfrak{w}'$ durch $-\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ durch $-\mathfrak{w}''$, kurz $\mathfrak{w}$ durch $-\mathfrak{w}$, so laufen sie mit anderen Phasen und Amplituden rückwärts, meist nicht einmal über denselben Weg. Das gilt, auch wenn der Körper konservativ ist. Damit ist auf rein wellenkinematischem Wege eine strittige Frage entschieden, die in der Thermodynamik der Strahlung von Bedeutung ist, worauf andernorts zurückzukommen ist. Es gibt aber Wellen, bei denen die Unumkehrbarkeit bedeutungslos gering ist und infolgedessen theoretisch und mathematisch ganz verleugnet werden darf, während diejenigen Wellen, bei denen die Unumkehrbarkeit stark hervortritt, die Beugungswellen im besonderen Wortsinne sind. Tritt z. B. eine Welle durch eine genügend große Öffnung, so kann ihre Oberflächenbeugung ganz zurücktreten gegen die mehr oder minder vollkommene Umkehrbarkeit des eigentlichen Strahls. Auch Ausschnitte von Wellen, die allseitig sich ungehindert ausbreiten können, dürfen in hinreichend großen Entfernungen von ihren Quellgebieten praktisch als umkehrbar gelten. Die umkehrbare Welle ist ein idealer Grenzfall, der aber für Theorie und Praxis von Bedeutung ist. Sein Gleichungssystem wird gewonnen, wenn das oben erwähnte Grundgleichungssystem der Welle der Bedingung unterworfen wird, daß es unabhängig sein soll vom Vorzeichen des Wellennormalenpaars.

Sofern die Wellen praktisch umkehrbar befunden werden, ist nun der oben gesuchte deduktive Weg, an dessen Ausgangspunkt nur das Gleichungssystem der betreffenden physikalischen Welle steht, beschrieben. Für den Fall isotroper Körper sind die umkehrbaren Untersysteme für elektromagnetische Wellen, Scherungs- und Verdünnungswellen im § 6 der genannten Grundlegung bereits niedergelegt. Irgendwelche andere Voraussetzungen oder Beschränkungen sind dabei nicht gemacht; insbesondere brauchen die Systeme der Flächen konstanter Körperparameter keineswegs zusammenzufallen. Für homogene Körper gehen unsere Wellen in Planwellen über, sonst aber haben sie auch in den kleinsten Teilen andern Charakter.

Von den am ebengenannten Ort entwickelten Eigenschaften der umkehrbaren Welle interessiert uns hier diejenige, welche besagt: Das Quadrat des Wellennormalenpaars ist in jedem Punkte gleich einer gewissen Kombination der Körperparameter an dieser Stelle. Bezeichnen wir diese Kombination mit a, so gilt also die Beziehung

$$\mathfrak{w}^2 = a. \qquad (5)$$

[1]) K. Uller, Grundlegung II, § 5. (Diese Zeitschrift 17, 610, 1916).

Sie gilt streng in elektromagnetischen und Scherungs-Wellen, allgemeiner gesprochen in solenoidalen Wellen; angenähert auch in Verdünnungswellen, allgemeiner gesprochen in lamellaren Wellen, sofern die logarithmischen Gefälle der Körperparameter schwach sind. Die Größe $a = a' + ia''$ heiße der komplexe Wellenparameter; a' der erste, a'' der zweite Wellenparameter. Beide Größen, welche die Dimension cm^{-2} haben, unterliegen keiner Beschränkung, beide können alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Bei permanenten Schwingungen ($\nu'' = 0$) verlangt das Energieprinzip, daß a'' negativ sei. Dann ist der Spreizwinkel ϑ zwischen der Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ und der Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$ stumpf. Aus (5) kommt

$$\mathfrak{w}'^2 - \mathfrak{w}''^2 = a'; \tag{6}$$

$$2(\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'') = 2|\mathfrak{w}'||\mathfrak{w}''|\cos\vartheta = a''; \tag{7}$$

woraus mit der Abkürzung

$$\sqrt{a'^2 + a''^2}/\cos^2\vartheta = \mathfrak{w}'^2 + \mathfrak{w}''^2 = (\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) \tag{8}$$

entsteht:

$$|\mathfrak{w}'| = \sqrt{1}/2\,\{(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) + a'\}; \tag{9}$$

$$|\mathfrak{w}''| = \sqrt{1}/2\,\{(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) - a'\}. \tag{10}$$

Man sieht, von welch großem Einfluß der Spreizwinkel ϑ auf die Beträge der Isophasen- und Isodynamennormale ist, also auf Richtung und Größe der Phasengeschwindigkeit und Strahlung und schließlich auch auf die Wellenlänge, worüber indessen die bisherige Physik unberührt hinweggeht! In konservativen Körpern verschwindet $(\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'')$ immer, aber nicht immer der Spreizvektor $[\mathfrak{w}''\mathfrak{w}'] = 1/2\,i\cdot[\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]$ des Wellennormalenpaars; hier ist also die Spreizung entweder null — dann verschwindet $\mathfrak{w}''$ oder $\mathfrak{w}'$, oder sie ist gleich einem rechten Winkel wie im Gebiet der sogenannten Totalreflexion.

Aus (5) folgt

$$2(\mathfrak{w}V)\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\mathfrak{w}^2 = \operatorname{grad} a. \tag{11}$$

Die Wellen sind mithin gekrümmt, und zwar lediglich durch die Gefälle der Körperparameter. Ferner ersehen wir, daß die Änderung von $\mathfrak{w}$ in Richtung von $\mathfrak{w}$ durch das Gefälle des Wellenparameters a bestimmt ist.

Jede $\mathfrak{w}$-Linie ist also berechenbar, sobald in einem ihrer Punkte $\mathfrak{w}$ gegeben ist.

Tiefer dringen wir in diesen für uns wichtigen Satz ein, wenn wir eine Zerlegung von $\mathfrak{w}$ vornehmen. Dazu ist es nötig, vorher einen mathematischen Satz herzuleiten.

Ein vektoranalytischer Satz. Es sei eine Schar von Krümmungslinien ($\mathfrak{k}$) gegeben. Einen beliebigen Vektor $\mathfrak{B}$ zerlegen wir in zwei Komponenten, parallel und senkrecht zu $\mathfrak{k}$. Die eine ist also $(\mathfrak{B}\mathfrak{k})\mathfrak{k}$, die andere, die in der Tangentialebene der Orthogonalfläche liegt, $\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\mathfrak{k})\mathfrak{k} = \mathfrak{B}_t$. Dementsprechend ist

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2 + \mathfrak{B}_t^2 = \mathfrak{B}^2. \tag{12}$$

Worauf wir hinaus wollen, ist eine Auseinanderlegung des Vektors $(\mathfrak{B}V)\mathfrak{B}_t$. Zu dem Zweck zerlegen wir $(\mathfrak{B}V)\mathfrak{B}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 2(\mathfrak{B}V)\mathfrak{B} &= 2(\mathfrak{B}V)\mathfrak{B}_t + 2(\mathfrak{B}V)(\mathfrak{B}\mathfrak{k})\mathfrak{k} \qquad (13)\\ &= 2(\mathfrak{B}V)\mathfrak{B}_t + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{k} - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2[\mathfrak{k}\operatorname{rot}\mathfrak{k}]\\ &\quad + \{(\mathfrak{k},\operatorname{grad}(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2) + 2(\mathfrak{B}_t,\operatorname{grad}_t(\mathfrak{B}\mathfrak{k}))\}\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Des weiteren stützen wir uns auf die bekannte Formel:

$$2(\mathfrak{A}V)\mathfrak{A} = \operatorname{grad}\mathfrak{A}^2 - 2[\mathfrak{A}, \operatorname{rot}\mathfrak{A}]. \tag{14}$$

Setzen wir darin für $\mathfrak{A}$ den oben genannten Tangentialvektor $\mathfrak{B}_t$, so erhalten wir für die Normalkomponente von (14)

$$\begin{aligned} 2(\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{B}_t) &= (\mathfrak{k}, \operatorname{grad}\mathfrak{B}_t^2) + 2([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]; \operatorname{rot}\mathfrak{B}_t)\\ &= (\mathfrak{k}, \operatorname{grad}\mathfrak{B}_t^2) + 2([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\operatorname{rot}\mathfrak{B}) \qquad (15)\\ &\quad - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\operatorname{rot}\mathfrak{k}) - 2(\mathfrak{B}_t, \operatorname{grad}_t(\mathfrak{B}\mathfrak{k})). \end{aligned}$$

Eliminieren wir nun aus (13) und (15) das letzte Glied, so kommt mit Rücksicht auf (12) und (14)

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}_t\mathfrak{B}^2 - 2[\mathfrak{B}, \operatorname{rot}\mathfrak{B}] =\\ &2(\mathfrak{B}V)\mathfrak{B}_t + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{k} - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2[\mathfrak{k}\operatorname{rot}\mathfrak{k}] \qquad (16)\\ &+ \{2([\mathfrak{B}\mathfrak{k}], \operatorname{rot}\mathfrak{B}) - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\operatorname{rot}\mathfrak{k}) - 2(\mathfrak{k}(\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{B}_t)\}\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Das letzte Glied hierin müssen wir noch umformen.

In der Identität (17)

$$([\mathfrak{C}\mathfrak{D}], (\mathfrak{D}V)\mathfrak{C}) + (\mathfrak{D}, (\mathfrak{C}V)[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]) = ([\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\operatorname{rot}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]),$$

die sich leicht aus $\operatorname{grad}(\mathfrak{C}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]) = 0$ entwickeln läßt, setzen wir $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_t$ und $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}_t$ und bedenken, daß damit $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = ([\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{k})\mathfrak{k} = S\mathfrak{k}$ wird. Der Skalarausdruck (17) wird nun insbesondere

$$(S\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{A}_t + \mathfrak{A}_t, (\mathfrak{B}_tV)S\mathfrak{k}) = 0$$

oder auch (18)

$$(\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{A}_t) + (\mathfrak{A}_t, (\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{k}) = 0.$$

Demnach können wir auch setzen

$$(\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{B}_t) = -(\mathfrak{B}_t(\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{k}).$$

Schließlich zerlegen wir in (16) noch $[\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{B}]$ in

$$-(\mathfrak{B}\mathfrak{k})[\operatorname{rot}\mathfrak{B}, \mathfrak{k}] + (\mathfrak{k}\operatorname{rot}\mathfrak{B})[\mathfrak{B}\mathfrak{k}] + ([\mathfrak{B}, \operatorname{rot}\mathfrak{B}]\mathfrak{k})\mathfrak{k}. \tag{19}$$

Nunmehr nimmt (16) die endgültige Gestalt an

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}V)\mathfrak{B}_t - 1/2\operatorname{grad}_t\mathfrak{B}^2 &+ (\mathfrak{k}\operatorname{rot}\mathfrak{B})[\mathfrak{B}\mathfrak{k}] + (\mathfrak{B}\mathfrak{k})[\mathfrak{k}\operatorname{rot}\mathfrak{B}]\\ &= -(\mathfrak{B}\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{k} + (\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2[\mathfrak{k}\operatorname{rot}\mathfrak{k}] \qquad (20)\\ &\quad + \{-(\mathfrak{B}_t(\mathfrak{B}_tV)\mathfrak{k}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{k})([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\operatorname{rot}\mathfrak{k})\}\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Identität liegt darin, daß es physikalische Aufgaben gibt, in denen die Intensität der $\mathfrak{B}$-Linien in jedem Punkt eine vorgegebene Größe sein soll, die im Raum stetig variiert. Soll nämlich $\mathfrak{B}^2 = \chi$ sein, so können wir stets als $\mathfrak{k}$-Linien die Gefäll-Linien von χ wählen, was $\operatorname{grad}_t\mathfrak{B}^2 = \operatorname{grad}_t\chi$ überall zum Verschwinden bringt.

Wir wenden nun diesen Satz, der auch für komplexe Vektoren gültig bleibt, auf unser Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ an, das ein komplexer Gradient ist. Es kommt, wenn wir $\mathfrak{k}$ überall mit der (komplexen) Richtung von grad a zusammenfallen lassen, also beschränkend annehmen, daß a' und a'' Funktionen ein

und derselben Veränderlichen seien, in Hinblick auf die Beziehungen (5) und (20)

$$(\mathfrak{w}F)\mathfrak{w}_r = \{(\mathfrak{w}F)\mathfrak{w}_r'\}_t - (\mathfrak{w}\mathfrak{f})(\mathfrak{w}_r F)\mathfrak{f} + (\mathfrak{w}\mathfrak{f})^2[\mathfrak{f}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}] \quad (21)$$
$$+\{-(\mathfrak{w}_r(\mathfrak{w}_r F)\mathfrak{f}) + (\mathfrak{w}\mathfrak{f})([\mathfrak{w}\mathfrak{f}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f})\}\mathfrak{f}$$

als volle Änderung der Tangentialkomponente von $\mathfrak{w}$ im Punkte P mit der Schichtnormale $\mathfrak{f}$, wenn man in der (komplexen) Richtung von $\mathfrak{w}$ zu einem unendlich benachbarten Punkte P' fortschreitet und die Tangentialkomponente daselbst auf die Schichtnormale $\mathfrak{f}'$ daselbst bezieht. Mit (21) und (11) erhalten wir für die volle Änderung der Normalkomponente von $\mathfrak{w}$ in Richtung von $\mathfrak{w}$

$$(\mathfrak{w}F)\{(\mathfrak{w}\mathfrak{f})\mathfrak{f}\}_t = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{t}\,\mathrm{grad}\,a)\mathfrak{f} - (\mathfrak{w}\mathfrak{f})\mathfrak{w}_r. \quad (22)$$

In (21) ist rechts an erster Stelle nachträglich ein Glied hinzugefügt mit dem Zeiger $\mathfrak{f}$, was besagen soll, daß diejenige Partialänderung des linksseitigen Ausdrucks gemeint ist, die bei konstant gehaltener Richtung der Schichtnormale auftritt. Man sieht, daß es den Wert Null hat. Geht man also von einem Punkte P zu einem unendlich benachbarten Punkte P' in der (komplexen) Richtung von $\mathfrak{w}$ weiter, so ändert sich die Tangentialkomponente von $\mathfrak{w}$ nicht, wenn man sie dort auf die Schichtnormale in P bezieht.

Es ist bemerkenswert, daß diese Folgerung aus den Voraussetzungen, daß $\mathfrak{w}$ ein Gradient sei und sein Quadrat einer gegebenen stetigen Ortsfunktion von obiger Beschränkung gleiche, sich mit der Koexistenzbedingung deckt, der für jede Welle von elementarer Schwingungsform die Wellennormalenpaare im Falle von Brechung und Reflexion beiderseits der Trennungsfläche zweier Körper zu genügen haben, nämlich daß die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{w}$ beiderseits gleich seien.

Sind insbesondere die $\mathfrak{w}$ reell, sind mithin die beiden Körper konservativ, so folgt aus der Koexistenzbedingung im Verein mit (5), also für umkehrbare Wellen, unmittelbar das Snelliussche Brechungsgesetz, und das Fermatsche Prinzip, auf solche Brechung angewandt, ist schließlich nur eine andere Formulierung dieses Gesetzes.

Damit löst sich nun der Widerspruch auf, der darin bestand, daß einerseits die Refraktionstheorie als unzulässig von uns erkannt worden war, andererseits aber das Fermatsche Prinzip, als dessen Wurzel das Snelliussche Brechungsgesetz angesehen wird, die Bahnen vollständig bestimmt und auch befriedigend, wenn durch konservative Körper die Welle sich hindurchkrümmt! Das Fermatsche Prinzip — so stellt sich jetzt heraus — gilt eben nicht nur für Brechung umkehrbarer Wellen in konservativen Körpern, sondern für umkehrbare Wellen in konservativen Körpern überhaupt.

Setzen wir einmal voraus, es wären in den Bahnen folgende drei Bedingungen als erfüllt erwiesen:

1. Die Richtung der Strahlung fällt überall mit der Richtung der Isophasennormale der Welle zusammen.

2. Die Isophasennormale ist ein Gradient.

3. Das Quadrat der Isophasennormale ist überall gleich einer stetigen und reellen Ortsfunktion.

Dann würde sich aus ihnen sofort die Beziehung (11) ergeben. Diese führt nach unserem vektoranalytischen Satz auf die Zerlegungen (21) und (22), welche aber identisch sind mit den aus dem Fermatschen Prinzip ableitbaren Formeln. Folglich ist das Fermatsche Prinzip des ausgewählten Weges in inhomogenen Körpern nur eine andere Formulierung des Inbegriffs unserer drei Voraussetzungen; seine Wurzel ist nicht das Snelliussche Brechungsgesetz.

Wir haben jetzt zu fragen, wann die genannten drei Bedingungen erfüllt sind. Die zweite ist stets erfüllt, die dritte nur bei umkehrbaren Wellen, und die erste bei permanenten Schwingungen und umkehrbaren Wellen in konservativen Körpern außerhalb des Gebietes der Totalreflexion[1]).

Für umkehrbare Wellen in konservativen Körpern und mit permanenten Schwingungen kann also die Bahnbestimmung nach dem Fermatschen Prinzip des ausgezeichneten Weges, gleichwertig mit den Beziehungen (21) und (22) erfolgen, man hat aber dabei die Vorstellung kontinuierlicher Brechung aufzugeben.

Hat der Körper indessen wellenlöschende Eigenschaften, dann ist die Ortsfunktion a komplex, dann tritt neben der Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ stets die Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$, also ein Wellennormalenpaar, auf. Auch jetzt sind die $\mathfrak{w}'$-Linien sowie die $\mathfrak{w}''$-Linien berechenbar, wenn auch die Rechnungen sich außerordentlich verwickelt gestalten, da durch den Spreizwinkel zwischen $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$, der in die Beträge von $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ eingeht, Wechselbeziehungen zwischen den $\mathfrak{w}'$- und $\mathfrak{w}''$-Linien sich einstellen. Auch jetzt sind diese Linien, falls a' und a'' Funktionen derselben Veränderlichen sind, ausgezeichnete Wege.

1) K. Uller, Eine Wellenstudie (Elster-Geitel-Festschrift; 1915, § 4). K. Uller, Die Strahlung usw. (a. a. O.).

aber die w'-Linien, die Isophasennormalenlinien, sind nicht mehr die Bahnen des definitiven Energiefortgangs in der umkehrbaren Welle. Diese Bahnen sind überhaupt nicht aus der Kenntnis des Wellennormalenpaars allein heraus konstruierbar, sondern erfordern auch die Kenntnis des Wellenvektors, kurz des Wellenbaus, da sie auch vom Polarisationszustand der Welle abhängen[1]). Folglich können diese Bahnen nicht mehr das Fermatsche Prinzip befolgen. In der Tat lassen die Erfahrungen — sie liegen bisher anscheinend nur bei Lichtwellen in der Erdatmosphäre vor — schließen, daß die nach dem Fermatschen Prinzip berechneten Bahnen um so mehr von der Wirklichkeit abweichen, je größer die Extinktion ist oder je stärker sie sich geltend machen kann.

Aus der Abhängigkeit der Strahlung einer umkehrbaren Welle in einem wellenlöschenden Körper vom Polarisationszustand ergibt sich für ein natürliches einfarbiges Lichtwellenbündel eine fortschreitende Querschnittsvergrößerung des ganzen Bündels, die sich der Querschnittsänderung der einzelnen Strahlen überlagert, die durch die Divergenz der Wellennormalenlinien bedingt ist, wie in § 6 der Grundlegung bewiesen wurde.

Wir wollen noch untersuchen, ob eine einfache umkehrbare Welle — das ist eine solche, in welcher der Spreizvektor $[w'', w']$ des Wellennormalenpaars verschwindet — ihre Einfachheit verliert oder behält. Setzen wir in der Identität

$$2(\mathfrak{A}\Gamma)\mathfrak{B} = \operatorname{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - \operatorname{rot}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} - [\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}] \quad (23)$$

$\mathfrak{A} = w \pm w^*$ und $\mathfrak{B} = [ww^*]$, so kommt

$$2(w \pm w^*\Gamma)[ww^*] = -\operatorname{rot}[w + w^*, [ww^*]] - \operatorname{div}(w \pm w^*)\cdot[ww^*] - [w \pm w^*, \operatorname{rot}[ww^*]]. \quad (24)$$

Nun ist wegen (5)

$$\operatorname{rot}[w \pm w^*, [ww^*]] = [w^* \operatorname{grad} a] + [w \operatorname{grad} a^*] - [w \pm w^*, \operatorname{grad}(ww^*)],$$

so daß

$$2(w \pm w^*, (w \pm w^*\Gamma)[ww^*]) = -(\operatorname{grad}\{a + a^* \pm 2(ww^*)\}, [ww^*]) \quad (25)$$

$$2(w \pm w^*, (w \pm w^*\Gamma, [ww^*]) = -(\operatorname{grad}(a) - a^*) + 2\operatorname{rot}[ww^*], [ww^*]); \quad (26)$$

darin sollen die oberen bzw. unteren Vorzeichen zusammen gehören. An (25) und (26) liest man den Satz ab: Ist in einem Punkte die umkehrbare Welle einfach, so ist sie es auch in der unmittelbaren Umgebung ringsherum. Mit anderen Worten: Eine einfache umkehrbare Welle verliert in einem wellenlöschenden Körper ihren einfachen Charakter im Laufe ihres Fortschreitens nur ganz allmählich. Sie verliert ihn gar nicht in einem konservativen Körper, da in einem solchen eine Isodynamennormale w'' überhaupt nicht auftreten kann außerhalb des Gebietes der Totalreflexion.

Wenn es wahr ist, daß die Bahnen des Sternenlichts in der extingierenden Erdatmosphäre nach den Berechnungen der Astronomen bei nicht sehr großen Zenitabständen das Fermatsche Prinzip noch befolgen, so ist das ein Beweis, daß die Atmosphäre keine scharfe obere Grenze hat. Denn im anderen Falle müßte beim Eintritt in diese eine radial gerichtete Isodynamennormale auftreten, die, wenn auch sehr klein, eine stärkere Abweichung der eindringenden Welle vom Bau der einfachen einleiten würde, womit auch eine Abweichung der Bahn von der nach dem Fermatschen Prinzip berechneten verbunden wäre.

Zum Schluß möge noch eine kritische Bemerkung zur bisherigen Extinktionstheorie Platz finden. Befangen in der landläufigen Vorstellung der Refraktion und ihrer völligen Unberührtheit von der Extinktion nimmt man an, daß auch bei Wellenlöschung Strahlengang, Abbildung und Querschnittsdeformation wie in konservativen Körpern zu berechnen seien. Die Wellenlöschung wirke nur auf die Intensität ein, und zwar nach der Bouguerschen Formel $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 \cdot e^{-\int k\,ds}$. Wir wissen jetzt nach den vorangegangenen Auseinandersetzungen, daß im Gegensatz zu dieser primitiven Auffassung der Einfluß der Extinktion den ganzen Bau und die Fortschreitungsrichtung der Welle durchdringt, daß er das Fermatsche Prinzip außer Geltung setzt und die Intensität nicht nur exponentiell schwächt. Kein Wunder daher, daß die bisherige Extinktionstheorie bei der wohl stärksten Prüfung, der sie im großen unterworfen werden kann, nämlich der Wiedergabe der Helligkeitsverteilung des von der Sonne hervorgerufenen Erdschattens, einen völligen Mißerfolg erlitten hat. Die Mitte des Erdschattens ist heller als der periphere Teil, denn die verfinsterte Mondscheibe leuchtet in der Mitte des Erdschattens uns heller als bei seinem Eintritt in denselben. Im Gegensatz dazu sollten nach den Rechnungen der Extinktionstheorie die peripheren Teile des Erdschattens in der Mondbahn ungefähr 700 mal heller sein als das Zentrum[1]).

Gießen, Dezember 1916.

(Eingegangen 16. Dezember 1916.)

1) Am letztgenannten Ort.

1) H. Petzold, Die Dioptrik der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur Theorie der Mondfinsternisse. (Dissertation Rostock 1907, S. 37; Beibl. **33**, 473.)

BESPRECHUNGEN.

Brooks and Weaver, A variable self and mutual inductor. Scientific papers of the Bureau of Standards (Department of commerce, U. S. A.) No. 290. S. 569—580. Für Interessenten frei zu beziehen durch das Bureau of Standards.

Veranlaßt durch die bei den Arbeiten der Anstalt sich geltend machenden Bedürfnisse haben die Verfasser systematische Versuche angestellt, um zur Konstruktion eines Selbstinduktionsvariometers zu gelangen, das in möglichst weitgehender Weise folgende Vorzüge in sich vereinigt: große Zeitkonstante bei handlicher Form, großer Veränderlichkeitsbereich, lineare Skala, keine oder geringe magnetische Wechselwirkung mit der Umgebung. Das Instrument, das diesen Anforderungen am weitesten nachkommt, besteht aus 3 kreisförmigen Hartgummischeiben, deren jede 2 Spulen trägt. Die mittlere Scheibe, deren Spulen doppelt so dick sind wie die in den beiden äußeren Scheiben befindlichen, ist um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse drehbar, die beiden andern sind fest. Die Dimensionen sämtlicher Spulen sind im übrigen gleich und werden genau angegeben. Die Spulen haben die Gestalt von Kettengliedern, d. h. Rechtecken, deren kurze Seiten durch Halbkreise ersetzt sind. Die 4 festen Spulen sind hintereinander geschaltet und zu zwei Klemmschrauben geführt, ebenso die zwei beweglichen. Schaltet man alle 6 Spulen hintereinander, so erhält man eine Selbstinduktion, deren Größe zwischen 125 und 1225 Mikrohenry, also um 1,1 Millihenry veränderlich ist. Zwischen 325 und 1025 Mikrohenry ist die Skala genau linear, zwischen 325 und 125 und zwischen 1025 und 1175 Mikrohenry nimmt die Länge der Skalenteile allmählich zu. Will man die beiden Spulensysteme als Primär- und Sekundärseite einer Gegeninduktivität benutzen, so muß man, um deren Größe zu ermitteln, bei jeder Einstellung die Ablesung auf der Skala — die nur Selbstinduktionswerte angibt — um 669 vermindern und dann durch 2 dividieren. Die Astasierung des Instruments wird dadurch erreicht, daß die beiden Spulen jedes Paares gegensinnig vom Strom durchflossen werden.

Zum Schlusse wird das Variometer mit anderen verglichen, deren Konstruktion ähnliche Absichten verfolgt, und es werden Hinweise gegeben, wie es in der einen oder der andern Richtung noch verbessert werden könnte.

Überflüssig und wenig glücklich will uns der Versuch erscheinen, gegen die Anwendung des Wortes Induktanz, Selbstinduktion zu protestieren, wenn damit auch der Apparat selber und nicht nur seine Haupteigenschaft bezeichnet werden soll, und statt dessen für ersteren das (englische) Wort Induktor einzuführen. Da der bisherige Gebrauch weder gegen Grammatik oder Logik verstößt, noch zu Unklarheiten Anlaß gibt, so besteht eigentlich kein triftiger Grund dafür, ihn in dieser Weise einschränken zu wollen. V. Pieck.

J. Klein, Chemie, anorganischer Teil. 6. verbesserte Auflage. kl. 8°. 170 S. (Sammlung Göschen Nr. 37.) Leipzig u. Berlin, G. J. Göschen 1915. Geb. M. 1.—

Das kleine Werk gibt auf engem Raum einen Überblick über die theoretischen und erfahrungsmäßigen Grundlagen der anorganischen Chemie. Nach Einführung der chemischen Grundbegriffe und der wichtigsten die Chemie betreffenden Gesetze werden die hauptsächlichsten Elemente, ihre Verbindungen, sowie ihre Darstellungsmethoden behandelt. Die neuesten Entwickelungen der Chemie sind weitgehend berücksichtigt; indessen sei hier eine Anregung erlaubt: die Darstellung der Allotropieerscheinungen sollte nicht den Eindruck erwecken, als hätten diese notwendig Polymerie zur Voraussetzung. — Die Art der Darstellung und die Erläuterung chemischer Begriffe und Vorgänge durch geschickt gewählte Beispiele macht das Werkchen für den Physiker recht geeignet zur ersten Orientierung auf chemischem Gebiete.

S. Kyropoulos.

S. Genelin, Das chemische Praktikum, anschließend an den obligaten Unterricht in der anorganischen Chemie, in Form von Eprouvettenversuchen, nebst einer kleinen Anleitung zum Analysieren. 8°. VI. u. 94 S. Wien, A. Pichlers Witwe & Sohn. 1915. Geb. K. 1.20; Mk. 1.05.

Das kleine Buch bringt eine große Anzahl einfacher chemischer Versuche für das Schülerpraktikum höherer Lehranstalten, mit einer kleinen Anleitung zur Ausführung einfacher Analysen. Die Versuche sind nach pädagogischen Gesichtspunkten geordnet und so ausgearbeitet, daß sie von den Schülern einzeln und bereits mit den einfachsten Hilfsmitteln ausgeführt werden können. Die gute Auswahl und Diskussion der Experimente macht das Büchlein zu einem recht wertvollen Unterrichtsmittel. S. Kyropoulos.

Aus Natur und Geisteswelt. Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. 8. Leipzig, B. G. Teubner. Jeder Band geb. M. 1.50.

228. Bd.: A. von Ihring, Die Wasserkraftmaschinen und deren Ausnutzung durch Wasserkräfte. 2. Aufl. IV u. 85 S. m. 57 Abbildungen. 1914.

Das Buch behandelt zunächst das Gefälle, die Stauanlagen, die Leistung von Wasserkräften sowie die Wassermessung, darauf die Wirkungsweise des Wassers in Maschinen, die Wasserräder, die Turbinen, ausgeführte Turbinenanlagen und schließlich die wirtschaftliche Bedeutung der Wasserkräfte. Der Verfasser verzichtet auf jede Rechnung und begnügt sich mit einigen energetischen Überlegungen; demgemäß ist das Schriftchen auch nur für Nichttechniker als Einführung zu brauchen. Für diese ist allerdings die Wassermessung viel zu ausführlich dargestellt, ebenso könnten von den 4 unterschlächtigen Wasserrädern 3 wegfallen. Der so gewonnene Raum käme dann den Turbinen zugute, wobei Widersprüche über die Stoßwirkung des Wassers auf Seite 19 und über die Beaufschlagung von Fourneyron-Turbinen auf Seite 35 und 36 auszumerzen wären. Die zurzeit wichtigste Francis-Turbine ist kein reines Radialrad, sondern arbeitet mit Radial- und Axialströmung, daher der bequeme Saugrohranschluß. Alte Axialräder sowie Partial-Turbinen könnten wegfallen, dafür dürfte die Regelung etwas ausführlicher besprochen werden als auf einer

halben Seite, deren Inhalt abgesehen von Unrichtigkeiten für den Leser kaum verständlich ist. Jedenfalls würden die meist guten Abbildungen mehr zur Geltung kommen, wenn der Text auf Grund selbständiger Erfahrungen und Studien, die dem Verfasser zu fehlen scheinen, zeitgemäß umgearbeitet würde.

H. Lorenz.

516. Bd.: R. Vater, Einführung in die technische Wärmelehre (Thermodynamik). Kl. 8°. VII u. 111 S. m. 40 Abbildungen. 1916.

Im Rahmen der bekannten Teubnerschen Sammlung hat der Verf. eine elementar gehaltene Einführung in dasjenige Gebiet der theoretischen Wärmelehre verfaßt, welches hauptsächlich in der Technik zur Anwendung kommt. Das Bändchen ist in erster Linie für Studierende geschrieben, welche von einer Vertiefung ihrer theoretischen Kenntnisse vielfach durch die Annahme abgehalten werden, daß eine solche ebenso schwierig wie zeitraubend sei. Aus diesem Grunde hat der Verf. eine größere Anzahl von zahlenmäßig durchgerechneten Beispielen eingefügt, welche die technische Wichtigkeit der abgeleiteten Gesetze erkennen lassen und das Verständnis derselben beim Leser vertiefen.

Wenn sich somit das kleine Buch vor allem an die Studierenden der technischen Hochschulen wendet, so ist es doch auch denen der Universitäten warm zu empfehlen. Es gipfelt nämlich in der Behandlung der sog. *S, T*- und *J, S*-Diagramme, bei denen einmal die Entropie und Temperatur, das andere Mal der Wärmeinhalt und die Entropie als Koordinaten gewählt sind. Diese Diagramme sind dem Ingenieur der Praxis ebenso vertraut wie sie dem Physiker im allgemeinen unbekannt sind. Von dem Zweck und der Benützung der Diagramme gibt das Buch ein sehr klares Bild, so daß auch der Physiker aus ihm das sehr wünschenswerte Verständnis dafür erhält, wie die ihm bekannten theoretischen Gesetze in der Praxis zur Verwendung kommen.

Oscar Knoblauch.

520. Bd.: P. Thormeyer, Philosophisches Wörterbuch. II u. 96 S. 1916.

Das vorliegende kleine Wörterbuch enthält in alphabetischer Reihenfolge die Erläuterungen von etwa tausend philosophischen Grundbegriffen, so daß dasselbe recht wohl zur Einführung in die Philosophie dienen und auch dem Physiker mitunter von Nutzen sein kann.

R. Lucas.

Ewald Fonrobert, Das Ozon. Gr. 8°. X u. 282 S. mit einer Abbildung. Stuttgart, Verlag von Ferdinand Enke. 1916. Geheftet M. 10.80, in Leinwand gebunden M. 12.—.

Das Ozon ist im letzten Jahrhundert aus einem chemischen Kuriosum — es sei nur an seine Identifikation mit Radiumemanation und an das lange Zeit rätselhafte Antozon erinnert — zu einem Reagenz und technischen Produkt von vielseitiger Verwendbarkeit und großer Bedeutung geworden. Es ist daher eine verdienstvolle Tat des Verf., den Inhalt der weitverstreuten Literatur zu einer Einzeldarstellung zusammengefaßt zu haben, auch ist der Zeitpunkt ihres Erscheinens — wichtige Streitfragen wurden gerade in den letzten Jahren gelöst — sehr geschickt gewählt. Wie der Verf. im Vorwort hervorhebt, wird im vorliegenden Bande nur die Chemie des Ozons eingehend behandelt, über seine physikalische Chemie hingegen kurz hinweggegangen, da ein besonderes Werk hierüber von einem anderen Bearbeiter demnächst erscheinen soll. Die Literatur ist, soweit Ref. es beurteilen kann, vollständig zusammengetragen, sie ist übersichtlich angeordnet und kritisch gewertet. Gerade letzteres ist auf dem Gebiete der Ozonchemie besonders schwierig, denn wo man hinblickt, stößt man auf Widersprüche. Daher konnte dieses Werk nur von einem geschrieben werden, der sich selbst jahrelang mit diesen Fragen experimentell beschäftigt und so eine große Erfahrung gewonnen hat, wie der Verf. Dieser hat nämlich in Gemeinschaft mit unserem heute erfolgreichsten Ozonforscher, mit Harries, an einem der größten Probleme, die mit Hilfe des Ozons gelöst wurden, an der Kautschuk-Synthese, mit gearbeitet. Diese seine Betätigung gereicht dem Werke einerseits zum Vorteil, indem die Arbeiten von Harries und seinen Schülern besonders klar und ausführlich behandelt sind, andererseits aber auch zum Nachteil, da der Verf. seinem Herrn und Meister gegenüber nicht immer die sonst so glücklich geübte Kritik walten läßt. Das Werk ist klar geschrieben, der Stil flüssig. Es könnte daher, auch wenn es nicht das einzige Ozonbuch in deutscher Sprache wäre, warm empfohlen werden.

Riesenfeld.

Werner v. Siemens-Gedenknummer. Dinglers polytechnisches Journal. 97. Jahrgang. Band 331. Heft 25. Berlin, R. Dietze 1916.

Die bekannte Zeitschrift „Dinglers polytechnisches Journal", die bald selbst auf ein 100jähriges Bestehen wird zurückblicken können, widmet das vorletzte Heft des nunmehr abgeschlossenen Jahrganges dem Andenken an ihren, wie die Schriftleitung mit Stolz hervorhebt, berühmtesten Mitarbeiter, Werner Siemens. War es doch in dieser Zeitschrift, in der seinerzeit der 29jährige Siemens seine erste literarische Arbeit veröffentlichte, und zwar „Über die Anwendung der erhitzten Luft als Triebkraft". Aus der Feder berufener Vertreter von Wissenschaft und Technik bringt die Gedenknummer eine Reihe von Artikeln, in denen uns in anschaulicher Weise zum Teil auf persönlichen Erinnerungen beruhend, ein Bild vom Leben und Schaffen dieses Großen gegeben wird. Unter den Abbildungen ist für uns Jüngere, die wir die Entwicklung der Elektrotechnik zu ihrer heutigen Höhe nicht mehr miterlebt haben, von besonderem Interesse diejenige einer der ersten Dynamomaschinen. Besonders hervorzuheben ist noch der unverkürzte Abdruck von Siemens' Brief an das Ministerium, mit dem die Gründung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt veranlaßt wurde.

V. Pieck.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Aachen Dr. Ladislaus Gasiorowski für Mathematik einschließlich darstellende Geometrie, an der Universität Jena Dr. Paul Hirsch für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Straßburg Dr. Andreas Speiser zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Zürich, Fräulein Dr. Johanna Westerdyk zum a. o. Professor für Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Utrecht.

Verliehen: Dem Observator am Geodätischen Observatorium bei Potsdam Dr. Erich Przybyllok und dem Observator am meteorologisch-magnetischen Observatorium daselbst Dr. W. Marten der Titel Professor, dem Lehrer für Chemie an der k. k. Fachschule in Haida und Leiter der Schulglashütte Dr. Kaspar Killer der Titel Professor.

Ehrung: Die königl. Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin verlieh die Helmholtz-Prämie dem ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität München Dr. Arnold Sommerfeld.

Angebote.

Für unser **photographisches Rechenbüro** suchen wir einen in diesen Arbeiten erfahrenen

Mathematiker,

der militärfrei ist. Offerten sind zu richten an **Optische Werke C. Reichert, Wien VIII,** Bennogasse 24—26.

Angebote.

Physiker

mit experimentellem Geschick und Verständnis für die Forderungen der Technik für unser Laboratorium gesucht. **Telegraphie-Gesellschaft m. b. H.** System Stille.

Angebote mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen und womöglich Lichtbild sind zu richten an Dr. **Erich Huth, Berlin W. 30,** Landshuterstraße 9.

Physiker

mit experimentellem Geschick und Verständnis für die Forderungen der Technik für unser Laboratorium gesucht. **Fernbild-Gesellschaft m. b. H.** System Stille.

Angebote mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen und womöglich Lichtbild sind zu richten an Dr. **Erich Huth, Berlin W. 30,** Landshuterstraße 9.

Bemerkungen für die Herren Mitarbeiter!

1. Die **Briefbezeichnung der Schriftleitung** ist Göttingen, Nikolausberger Weg 20.

2. Die Physikalische Zeitschrift will vor allem einer rasch aufklärenden und anregenden Berichterstattung dienen. Die Mitteilungen müssen daher **auf das Wesentliche beschränkt** und **in möglichst knapper Form** abgefaßt sein. Sie sollen im allgemeinen den Umfang von etwa 8 Spalten nicht überschreiten.

3. Die **Abhandlungen** müssen druckfertig eingeliefert werden. Im Interesse rascher Erledigung liegt es, sie auf **einseitig** und deutlich, am besten mit **Schreibmaschine** geschriebenen Blättern einzuliefern.

4. **Zitate** bitten wir in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form zu geben; auch bitten wir, die vom Ausschuß für Einheiten und Formelzeichen (AEF) vorgeschlagenen Bezeichnungen zu berücksichtigen.

5. Am Schluße der Arbeit bitten wir eine kurze **Zusammenfassung** der wesentlichen Ergebnisse sowie die **Briefbezeichnung des Verfassers** beizufügen.

6. **Figurenvorlagen** müssen auf besonderen Blättern **gleichzeitig mit der Abhandlung** und möglichst so eingeliefert werden, daß ihre Wiedergabe ohne weiteres erfolgen kann. Wiedergabe auf besonderen Tafeln kann, mit Rücksicht auf die hohen Kosten, nur ausnahmsweise ausgeführt werden.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag der Physikalischen Zeitschrift.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.